SIF 5005 Matematikk 2
våren 2001

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Diverse løsningsforslag

75012 Matematikk 1B, mai 1994 (side 77–79)

$\boxed{6}$ **a)**

Vi finner en potensialfunksjon $\phi(x,y,z)$ slik at $F(x,y,z) = \langle 2xye^{x^2}, e^{x^2}, z\rangle = \langle \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\rangle$. For x-komponenten har vi at $\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xye^{x^2}$. Integrasjon mhp. x gir

$$\phi(x,y,z) = ye^{x^2} + \xi(y,z),$$

der $\xi(y,z)$ er "integrasjonskonstanten", en vilkårlig funksjon av y og z. Vi deriverer mhp. y og sammenligner med y-komponenten av $\mathbf{F}$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = e^{x^2} + \frac{\partial\xi}{\partial y}(y,z) = e^{x^2}.$$

Altså er $\frac{\partial\xi}{\partial y}(y,z) = 0$, dvs. $\xi(y,z) = \xi(z)$ avhenger bare av z.

Vi deriverer så $\phi(x,y,z) = ye^{x^2} + \xi(z)$ mhp. z og sammenligner med z-komponenten av $\mathbf{F}$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \xi'(z) = z.$$

Altså er $\xi(z) = \frac{1}{2}z^2 + C$ der konstanten C kan velges fritt, så

$$\phi(x,y,z) = ye^{x^2} + \frac{1}{2}z^2 + C.$$

Følgelig er $\mathbf{F}(x,y,z)$ et konservativt vektorfelt.

b)

Parameterfremstillingen til C er gitt ved $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t\rangle$ der $0 \le t \le \pi$. Vi får da:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_C \nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}(\pi)) - \phi(\mathbf{r}(0)) = \frac{\pi^2}{2}.$$

75012 Matematikk 1B, august 1994 (side 83–85)

$\boxed{2}$

$$f(x,y) = 9x^4 + 16x^3 + 6x^2y^2 \qquad R: \quad x^2 + 2x + y^2 \le 0$$

a. $f(x,y)$ er et polynom. De partiell deriverte eksisterer derfor overalt. De kritiske punktene til $f(x,y)$ er derfor gitt ved at både $f_x(x,y) = 0$ og $f_y(x,y) = 0$.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 36x^3 + 48x^2 + 12xy^2 = 0 \\ f_y(x,y) &= 12x^2y = 0 \end{aligned}$$

Den siste ligningen gir to muligheter: Enten $x = 0$ eller $y = 0$.

<u>Mulighet 1: $x = 0$</u>

Innsatt i den første ligningen gir det $0 = 0$. Altså: Alle punktene på y–aksen, $(0,y)$, er kritiske.

<u>Mulighet 2: $y = 0$</u>

Innsatt i den første ligningen gir det $36x^3 + 48x^2 = 0$ som holder hvis enten $x = 0$ eller $3x + 4 = 0$, det vil si, $x = -4/3$. $(-4/3, 0)$ er derfor også et kritisk punkt.

R er gitt ved $x^2 + 2x + y^2 \le 0$, altså $(x+1)^2 + y^2 \le 1$.

R er altså et lukket sirkulært område med sentrum i $(-1,0)$ og radius 1. Av de kritiske punktene for f er det bare $(-4/3, 0)$ som ligger i det indre av R.

<u>Klassifisering av $(-4/3, 0)$:</u>

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 108x^2 + 96x + 12y^2 & f_{xx}(-4/3,0) &= 64 \\ f_{xy}(x,y) &= 24xy & f_{xy}(-4/3,0) &= 0 \\ f_{yy}(x,y) &= 12x^2 & f_{yy}(-4/3,0) &= 64/3 \end{aligned}$$

som gir at $\Delta(-4/3,0) = 64 \cdot 64/3 - 0^2 > 0$. Derfor er $(-4/3,0)$ et lokalt minimum.

b.

Randen til R er gitt ved $x^2 + 2x + y^2 = 0$. Det vil si, $y^2 = -x^2 - 2x$ og $f(x,y)$ er gitt ved

$$f(x,y) = 9x^4 + 16x^3 + 6x^2(-x^2 - 2x) = 3x^4 + 4x^3$$

på randen til R. Vi søker derfor ekstremalpunkter for

$$g(x) = 3x^4 + 4x^3 \qquad \text{for } -2 \le x \le 0$$

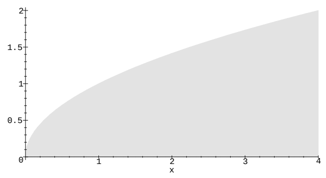
Siden $g'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 0$ for $x = 0$ og $x = -1$, har vi følgende kandidater til absolutt max/min: $(-4/3,0)$, $(0,0)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(-2,0)$. Siden

$$f(-4/3,0) = -256/27, \quad f(0,0) = 0, \quad f(-1,1) = -1, \quad f(-1,-1) = -1, \quad f(-2,0) = 16$$

ser vi at funksjonen har absolutt maksimum i R i punktet $(-2,0)$ og absolutt minimum i R i punktet $(-4/3,0)$.

$\boxed{3}$ Tegner integrasjonsområdet, og ser at vi kan bytte om integrasjonsrekkefølgen til

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x^3}\, dy\, dx = \int_0^4 \sqrt{x}\cos\sqrt{x^3}\, dx$$



Substituerer vi $u = \sqrt{x^3}$ får vi $du = \frac{3}{2}\sqrt{x}\, dx$, og skal integrere fra $\sqrt{0^3} = 0$ til $\sqrt{4^3} = 8$, så integralet er lik

$$\int_0^8 \frac{2}{3}\cos u\, du = \frac{2}{3}[\sin u]_0^8 = \frac{2}{3}\sin 8$$

$\boxed{4}$ Flaten S er altså gitt ved $\mathbf{r}(u,v) = \langle u-v, u+v, uv\rangle$ med (u,v) innenfor enhetssirkelen. Først regner vi ut

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & v \\ -1 & 1 & u \end{vmatrix} = \langle u-v, -(u+v), 2\rangle.$$

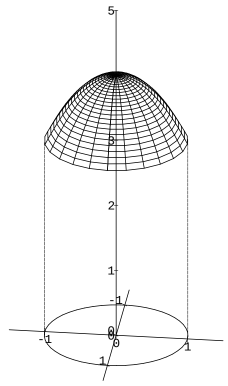
Videre, så er

$$\begin{aligned} dS &= \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\, dv = \sqrt{(u-v)^2 + (u+v)^2 + 4}\, du\, dv \\ &= \sqrt{2u^2 + 2v^2 + 4}\, du\, dv. \end{aligned}$$

Ved bruk av polarkoordinater i uv-planet får vi derfor for arealet til flaten S,

$$\begin{aligned} \operatorname{areal}(S) &= \iint \sqrt{2u^2+2v^2+4}\, du\, dv = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2r^2+4}\, r\, dr\, d\theta \\ &= 2\pi\left[\frac{1}{6}(2r^2+4)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}\left(6\sqrt{6} - 8\right). \end{aligned}$$

$\boxed{6}$ a)



Vi integrerer i sylinderkoordinater. Masse:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_T \rho\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_3^{4-r^2} r\, dz\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(4-r^2-3)\, dr\, d\theta \\ &= 2\pi\int_0^1 (r - r^3)\, dr = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Av symmetrigrunner ligger massesenteret $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ på z-aksen, dvs. $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{m}\iiint_T z\rho\, dV = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_3^{4-r^2} zr\, dz\, dr\, d\theta \\ &= \frac{2\pi}{m}\int_0^1 \tfrac{1}{2}\left((4-r^2)^2 - 3^2\right) r\, dr \\ &= 2\int_0^1 (7r - 8r^3 + r^5)\, dr = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

b) Vi har at

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial h}{\partial y} + 1 = 1$$

ifølge den oppgitte betingelsen. La B være være den sirkulære bunnflaten til T. Divergensteoremet anvendt på den lukkede flaten bestående av S og T gir at

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS + \iint_B \vec{F}\cdot(-\vec{k})\, dS = \iiint_T \operatorname{div}\vec{F}\, dV,$$

slik at

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS &= \iiint_T \operatorname{div}\vec{F}\, dV + \iint_B \vec{F}\cdot\vec{k}\, dS = \iiint_T dV + \iint_B z\, dS \\ &= \iiint_T dV + \iint_B 3\, dS \overset{\text{a)}}{=} \frac{\pi}{2} + 3\operatorname{areal}(B) = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2}. \end{aligned}$$

75012 Matematikk 1B, mai 1995 (side 89–91)

$\boxed{2}$ Du står i punktet $P(1,1,5)$ på en fjellside der høyden over havet er gitt ved

$$z = f(x,y) = \frac{100}{10 + 3x^2 + 7y^2},$$

og du beveger deg i retning $\vec{v} = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. La $\vec{u} = \vec{v}/|\vec{v}|$. Vinkelen α med horisontalplanet er gitt ved

$$\tan\alpha = D_{\vec{u}} f(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot\vec{u}.$$

Her er

$$\nabla f(x,y) = \frac{-200}{(10+3x^2+7y^2)^2}(3x\vec{\imath}+7y\vec{\jmath})$$

og

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3\vec{\imath}+\vec{\jmath}).$$

Dermed

$$D_{\vec{u}}f(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot\vec{u} = -\frac{1}{2}(3\vec{\imath}+7\vec{\jmath})\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(-3\vec{\imath}+\vec{\jmath}) = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

og vinkelen med horisontalplanet er $\alpha = \arctan(\frac{1}{\sqrt{10}}) \approx 17.5°$.

De retningene $\vec{w} = \langle w_1, w_2\rangle$ som gjør at man beholder høyden er de som oppfyller $D_{\vec{w}/|\vec{w}|}f(P) = 0$, det vil si,

$$-\frac{1}{2}(3\vec{\imath}+7\vec{\jmath})\cdot\frac{(w_1\vec{\imath}+w_2\vec{\jmath})}{\sqrt{w_1^2+w_2^2}} = 0.$$

Dette er oppfylt for retningene $-7\vec{\imath}+3\vec{\jmath}$ og $7\vec{\imath}-3\vec{\jmath}$.

$\boxed{6}$ **a)**

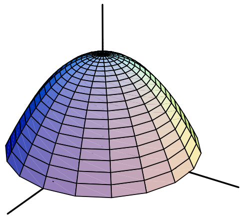
Volumet $V = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\left(2-\frac{r^2}{2}\right)r\,dr\,d\theta$

$= 2\pi\left[r^2-\frac{r^4}{8}\right]_0^2 = 4\pi$

b)

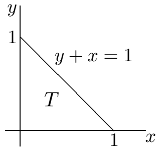
$$W_C = \oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \int\int_R\left\{\frac{\partial}{\partial x}2x - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{6}y^3\right)\right\}dA$$
$$= \int\int_R\left(2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2\right)dA = \int\int_R\left(2-\frac{r^2}{2}\right)r\,dr\,d\theta$$

Dette integralet kan tolkes som volumet mellom paraboloiden i a) og xy–planet, regnet med fortegn. (Negativt volum for deler som ligger under xy–planet.) Integralet er maksimalt når vi tar med alle delene med positivt volum og bare disse. Med andre ord, når vi bare tar med volumet fra a). Kurven som gir maksimal verdi for W_C er derfor sirkelen med sentrum i origo og radius 2 fra a), og maksimalverdien av W_c blir 4π.



75002 Matematikk 1B, mai 1995 (side 93)

$\boxed{2}$ **a)**



Linja $y+x=1$ har ligning $r\sin\theta + r\cos\theta = 1$ i polarkoordinater. Trekanten T kan derfor beskrives som et radialt enkelt område ved ulikhetene

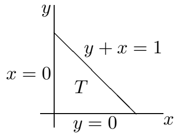
$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}.$$

$$\iint_T \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^{1/(\sin\theta+\cos\theta)}\cos\left(\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)r\,dr\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos\left(\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)\frac{1}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}\,d\theta = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\cos u\,du = \frac{1}{2}\sin 1$$

(Substitusjon $u = \dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$, $du = \dfrac{2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}\,d\theta$.)

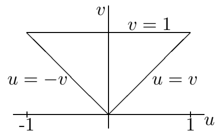
b)

$$\begin{matrix} u = y-x \\ v = y+x \end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad dx\,dy = \frac{1}{|\partial(u,v)/\partial(x,y)|}\,du\,dv = \frac{1}{2}\,du\,dv$$



$\boxed{u = y-x,\ v = y+x}$

$y+x=1$	gir	$v=1$
$x=0$	gir	$u=v$
$y=0$	gir	$u=-v$



$$\iint_T \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)dA = \int_0^1\int_{-v}^{v}\cos\left(\frac{u}{v}\right)\frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_0^1\left[v\sin\left(\frac{u}{v}\right)\right]_{u=-v}^{u=v}dv$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 v\left[\sin 1 - \sin(-1)\right]dv = \frac{1}{2}\int_0^1 2v\sin 1\,dv = \sin 1\left[\frac{1}{2}v^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\sin 1$$

75012 Matematikk 1B, august 1995 (side 95–97)

$\boxed{4b}$ (**a**-punktet ble gitt i øving 6 – se løsningsforslaget der.)
Vi bruker at

$$\Delta M \approx dM = \frac{\partial M}{\partial\alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial M}{\partial\beta}\Delta\beta, \qquad M = \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} = e^{-(\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta)}.$$

$$\frac{\partial M}{\partial\alpha} = -e^{-(\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta)}\left[\ln(\alpha+\beta)+1\right] = -\frac{1+\ln(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}} = \frac{\partial M}{\partial\beta}.$$

For $\alpha=\beta=1$ får vi

$$\frac{\partial M}{\partial\alpha} = \frac{\partial M}{\partial\beta} = -\frac{1+\ln 2}{4}, \quad \text{dermed:} \quad \Delta M \approx -\frac{1+\ln 2}{4}(\Delta\alpha+\Delta\beta).$$

$\boxed{6}$ **a)**

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \vec{i}(h(x) - x^2) - \vec{j}(yh'(x) - 2xy) + \vec{k}(2xz - 2xz) = \vec{0}$$

hvis og bare hvis $h(x) = x^2$

$$\begin{aligned}
f_x(x,y,z) &= 2xyz \\
f(x,y,z) &= x^2yz + \varphi(y,z) \\
f_y(x,y,z) &= x^2z + \varphi_y(y,z) = x^2z \quad \Rightarrow \quad \varphi_y(y,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y,z) = \psi(z) \\
f_z(x,y,z) &= x^2y + \psi'(z) = x^2y + 0 \quad \Rightarrow \quad \psi'(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(z) = C
\end{aligned}$$

Potensialfunksjon: $f(x,y,z) = x^2yz$ (Har valgt $C = 0$.)

b) $K: \quad x = 1, \quad y = \dfrac{t^2}{\sqrt{2}}, \quad z = \dfrac{t^3}{3}; \quad 0 \le t \le 1$

<u>Tilfelle 1:</u> $h(x) = 2x$

$$\begin{aligned}
\int_K \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{t=0}^1 \left(2\cdot t\cdot \frac{t^2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{t^3}{3}\cdot 1 + t^2\cdot\frac{t^3}{3}\cdot\sqrt{2}\,t + \frac{t^2}{\sqrt{2}}\cdot 2t\cdot t^2\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{3}t^6 + \frac{\sqrt{2}}{3}t^6 + \sqrt{2}\,t^5\right) dt = \frac{11}{42}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

<u>Tilfelle 2:</u> $h(x) = x^2$

$$\int_K \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}) - f(0,0,0) = 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{3} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

75012 Matematikk 1B, august 1996 (side 109–111)

$\boxed{3}$ Betrakt en av de to rettvinklete trekantene på figuren i oppgaven hvor den ene siden er y og dens motstående vinkel er θ. De to andre sidene i denne trekanten blir $\frac{y}{\sin\theta}$ og $\frac{y\cos\theta}{\sin\theta}$. Dette gir følgende areal på tverrsnittet av grøfta:

$$A = xy + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{y\cos\theta}{\sin\theta}\cdot y = xy + \frac{y^2\cos\theta}{\sin\theta}$$

Kravet $A = 1$ gir nå at $y \ne 0$ og

$$x = \frac{1}{y} - \frac{y\cos\theta}{\sin\theta}$$

og

$$S = \frac{y}{\sin\theta} + \left(\frac{1}{y} - \frac{y\cos\theta}{\sin\theta}\right) + \frac{y}{\sin\theta} = \frac{1}{y} + \frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}y$$

For at dette skal bli noen grøft, må vi kreve at $y > 0$ og at $0 < \theta < \pi$ (eventuelt $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$ hvis vi ikke tillater at grøftekanten skrår feil vei). Vi skal altså finne globalt minimum til $S(\theta, y)$ på mengden $D_S = \{(\theta,y) | 0 < \theta < \pi,\ y > 0\}$. Av uttrykket

$$\frac{\partial S}{\partial\theta} = y\frac{1 - 2\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

ser vi at

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial\theta} &< 0 \quad \text{for} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \quad \text{og} \quad y > 0 \\
\frac{\partial S}{\partial\theta} &= 0 \quad \text{for} \quad \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{og} \quad y > 0 \\
\frac{\partial S}{\partial\theta} &> 0 \quad \text{for} \quad \frac{\pi}{3} < \theta < \pi \quad \text{og} \quad y > 0,
\end{aligned}$$

så for enhver fast $y_0 > 0$ er $g(\frac{\pi}{3}) = S(\frac{\pi}{3}, y_0)$ absolutt minimumsverdi til funksjonen $g(\theta) = S(\theta, y_0)$ på intervallet $< 0, \pi >$ (teorem 2 side 225). Absolutt minimum til $S(\theta, y)$ på D_S må derfor være et sted på linjen $\theta = \frac{\pi}{3}$. La

$$h(y) = S(\frac{\pi}{3}, y) = \frac{1}{y} + \frac{2 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{y} + \sqrt{3}y$$

Vi finner minimum til denne funksjonen:

$$h'(y) = -\frac{1}{y^2} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{y^2}\left(y - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\left(y + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right),$$

så

$$\begin{aligned}
h'(y) &< 0 \quad \text{for} \quad 0 < y < \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \\
h'(y) &= 0 \quad \text{for} \quad y = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \\
h'(y) &> 0 \quad \text{for} \quad y > \frac{1}{\sqrt[4]{3}}.
\end{aligned}$$

Dermed har $h(y)$ absolutt minimumsverdi $h(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}) = 2\sqrt[4]{3}$ på intervallet $y > 0$. Den minste verdien til S er altså $S_{\min} = 2\sqrt[4]{3}$, som vi får når $\theta = \frac{\pi}{3}$, $y = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Den tilhørende verdien for x blir da:

$$x = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}} - \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt[4]{3}$$

$\boxed{4}$ **a)** Vi vet at arealet $a(S)$ er gitt ved

$$a(S) = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\right| d\phi\, d\theta$$

der

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = \langle a\sin\phi\cos\theta, a\sin\phi\sin\theta, a\cos\phi\rangle \quad \phi_1 \le \phi \le \phi_2,\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2.$$

Her blir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= \langle a^2\sin^2\phi\cos\theta, a^2\sin^2\phi\sin\theta, a^2\sin\phi\cos\phi\rangle
\end{aligned}$$

og dermed

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| = a^2\sqrt{\sin^2\phi} = a^2|\sin\phi| = a^2\sin\phi$$

når vi bruker at $\sin\phi \geq 0$ for $0 \leq \phi \leq \pi$. Altså er arealet av S gitt ved

$$a(S) = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} a^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta.$$

b) Vi regner intervallene for lengde– og breddegradene om til radianer og husker at breddegrad $= 90° - \phi°$. Dette gir

$$\frac{16\pi}{180} \leq \phi \leq \frac{19\pi}{180}, \quad \frac{19\pi}{180} \leq \theta \leq \frac{22\pi}{180}.$$

Arealet av den delen av Tromsøflaket som er oppgitt kan finnes ved å bruke formelen fra **a)** med $a = 6370$:

$$\int_{19\pi/180}^{22\pi/180}\int_{16\pi/180}^{19\pi/180} (6370)^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta = (6370)^2\frac{\pi}{60}\Big(\cos\frac{16\pi}{180} - \cos\frac{19\pi}{180}\Big) \approx 33\,448 \text{ [km}^2\text{]}.$$

75012 Matematikk 1B, august 1997 (side 123–125)

3 La

$$N(L,S,H) = 1000L^{0.5}S^{0.45}H^{0.3}$$

og

$$G(L,S,H) = 400\,000L + 200\,000S + 150\,000H - 5\,000\,000.$$

Vi søker maksimumspunktet for N under bibetingelsen $G(L,S,H) = 0$. Da gradienten til G aldri er null, kan vi bruke Lagranges metode for å finne maksimum. Vi forlanger at L, H og S alle er positive (om noen er null, ser vi at N er null som ikke er en maksimumsverdi). Vi skal ha

$$\nabla N = \lambda \nabla G$$

som, når vi forkorter med 1000, gir ligningene

$$0.5L^{-0.5}S^{0.45}H^{0.3} = 400\lambda \tag{1}$$
$$0.45L^{0.5}S^{-0.55}H^{0.3} = 200\lambda \tag{2}$$
$$0.3L^{0.5}S^{0.45}H^{-0.3} = 150\lambda. \tag{3}$$

Vi ser at λ ikke kan være null. Deler vi ligning (1) med ligning (2), får vi $\frac{50}{45}L^{-1}S = 2$, $L = \frac{5}{9}S$. Deler vi så ligning (2) med ligning (3), får vi $\frac{45}{30}S^{-1}H = \frac{4}{3}$, $H = \frac{8}{9}S$. Setter vi dette inn i bibetingelsen $G(L,S,H) = 0$ og forkorter med 10 000, får vi

$$40 \cdot \tfrac{5}{9}S + 20 \cdot S + 15 \cdot \tfrac{8}{9}S = 500.$$

Det gir $S = 9$ og dermed $L = 5$ og $H = 8$.

Da dette er eneste løsningen på ligningene, må det være maksimumspunktet (minimum er null, når en av L, S og H er null). Legesenteret bør altså ansette 5 leger, 9 sykepleiere og 8 hjelpepleiere.

5

$$\mathbf{r}(u,v) = \Big(u^2 + 2v^2,\ \sqrt{2}uv,\ 2u^2 + v^2\Big)$$

for $(u,v) \in [-1,1] \times [-1,1]$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \Big(2u,\ \sqrt{2}v,\ 4u\Big)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \Big(4v,\ \sqrt{2}u,\ 2v\Big)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & \sqrt{2}v & 4u \\ 4v & \sqrt{2}u & 2v \end{vmatrix} = \Big(\sqrt{2}(2v^2 - 4u^2),\ 16uv - 4uv,\ \sqrt{2}(2u^2 - 4v^2)\Big)$$

Arealet blir altså

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{8(v^2 - 2u^2)^2 + 144u^2v^2 + 8(u^2 - 2v^2)^2}\,du\,dv \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{40}(v^2 + u^2)\,du\,dv \\ &= 16\sqrt{10}/3\end{aligned}$$

SIF5005 Matematikk 2, mai 1998 (side 129–130)

4c (Punktene **a** og **b** ble gitt i øving 10 – se løsningsforslaget der.)

Vi skal beregne $\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ der $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle x^2ye^z, -xy^2e^z, e^{xyz}\rangle$, S er den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = x^2 + y^2$, og $\mathbf{n}$ er enhetsnormalen som peker ut av T. Ved Stokes' teorem har vi:

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds\,,$$

der C er sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ i planet $z = 1$, orientert *med* urviseren sett ovenfra. Parametriseringen $\mathbf{r}(t) = \langle\cos t, \sin t, 1\rangle$, $0 \leq t \leq 2\pi$, beskriver C i *motsatt* retning. Dette gir:

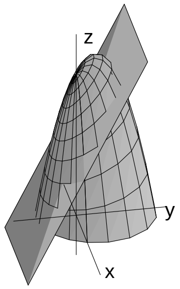
$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds &= -\int_0^{2\pi}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt \\ &= -\int_0^{2\pi}\langle\cos^2 t\sin t\cdot e, -\cos t\sin^2 t\cdot e, e^{\cos t\sin t}\rangle\cdot\langle-\sin t, \cos t, 0\rangle\,dt \\ &= e\int_0^{2\pi}2\cos^2 t\sin^2 t\,dt = \frac{e}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt = \frac{e}{2}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 4t)\,dt \\ &= \frac{e}{2}[\frac{1}{2}t + \frac{1}{8}\cos 4t]_0^{2\pi} = \frac{\pi e}{2}\,.\end{aligned}$$

Alternativt: Bruk at C også er randkurven til sirkelskiven $S'\colon x^2+y^2 \le 1$ i planet $z=1$, med $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$. Vi har $\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot(-\mathbf{k}) = -(\frac{\partial}{\partial x}(-xy^2e^z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2ye^z)) = (x^2+y^2)e^z$ på S', og dermed:

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S'} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S'} (x^2+y^2)e^z\,dS$$
$$= \iint_D (x^2+y^2)e\,dx\,dy = e\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 r\,dr\,d\theta = e\cdot 2\pi\frac{1}{4} = \frac{\pi e}{2}\,.$$

SIF5005 Matematikk 2, august 1998 (side 133-135)

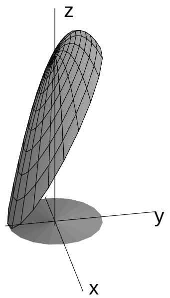
$\boxed{5}$ **a)** Legemet T er begrenset av paraboloiden $z = 9-x^2-(y-1)^2$ og planet $z = 2y+4$. Vi bestemmer først skjæringskurven mellom de to flatene:



$$\begin{aligned} 9-x^2-(y-1)^2 &= 2y+4 \\ 9-x^2-y^2+2y-1 &= 2y+4 \\ x^2+y^2 &= 4\,. \end{aligned}$$

Skjæringskurven ligger altså på sylinderflaten $x^2+y^2 = 4$. Dette betyr at projeksjonen av T i xy-planet er sirkelskiven $D\colon x^2+y^2 \le 4$.

Volum:



$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(T) &= \iint_D (9-x^2-(y-1)^2-(2y+4))\,dA \\ &= \iint_D (4-x^2-y^2)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2)r\,dr\,d\theta \\ &= 2\pi\int_0^2 (4r-r^3)\,dr = 2\pi[2r^2-\tfrac{1}{4}r^4]_0^2 = 2\pi(8-4) \\ &= 8\pi\,. \end{aligned}$$

b) Med $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x-yz)\mathbf{i}$ og S = overflaten til T, har vi ved divergenssetningen:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_T 2\,dV = 2\cdot\operatorname{vol}(T) = 2\cdot 8\pi$$
$$= 16\pi\,,$$

der $\mathbf{n}$ er utadrettet enhetsnormal på S.
La A være den delen av S som ligger i planet $z = 2y+4$. Vektoren $\mathbf{N} = \langle 0,2,-1\rangle$

er normal til A (og peker ut av T). Vi får:

$$\iint_A \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_A \mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}\,dS \iint_A \langle 2x-yz,0,0\rangle\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\langle 0,2,-1\rangle\,dS = \iint_A 0\,dS$$
$$= 0\,.$$

La så B være den krumme delen av overflaten til T. Vi får:

$$\iint_B \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS - \iint_A \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = 16\pi - 0$$
$$= 16\pi\,.$$

c) Vi skal beregne $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ ved hjelp av Stokes' teorem, der C er skjæringskurven mellom flatene A og B, orientert mot urviseren sett ovenfra. Flaten A har C som positivt orientert randkurve dersom vi lar normalen til A peke *inn* i legemet T. Projeksjonen av A i xy-planet er sirkelskiven $D\colon x^2+y^2 \le 4$. Vi kan derfor parametrisere A som følger:

$$\mathbf{r}(x,y) = \langle x,y,2y+4\rangle, \quad (x,y)\in D\,.$$

Dette gir

$$\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y = \langle 1,0,0\rangle\times\langle 0,1,2\rangle = \mathbf{i}\times(\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = -2\mathbf{j}+\mathbf{k} = \langle 0,-2,1\rangle\,.$$

Vi ser at normalen $\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y = \langle 0,-2,1\rangle$ peker riktig vei med den orienteringen vi nå bruker. Siden

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x-yz & 0 & 0 \end{vmatrix} = \langle 0,-y,z\rangle\,,$$

får vi ved Stokes' teorem:

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds &\overset{\text{Stokes}}{=} \iint_A \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D \langle 0,-y,2y+4\rangle\cdot\langle 0,-2,1\rangle\,dx\,dy \\ &= \iint_D (4y+4)\,dx\,dy = 4\iint_D y\,dx\,dy + 4\iint_D dx\,dy \\ &= 4\cdot\operatorname{areal}(D)\cdot\overline{y} + 4\cdot\operatorname{areal}(D)\,, \end{aligned}$$

hvor $\overline{y}$ er y-koordinaten til tyngdepunktet (sentroiden). Tyngdepunktet til D faller sammen med sirkelens sentrum, slik at $\overline{y} = 0$. Dermed har vi:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = 4\cdot\operatorname{areal}(D) = 4\cdot\pi\cdot 2^2 = 16\pi\,.$$