Potensialer og vektorpotensialer

Harald Hanche-Olsen

10. april 2003

1 Innledning

Det er lett å vise ved direkte regning (så lenge vi kjenner til resultatet om likhet av blandede partiellderiverte) at om $f(x,y,z)$ er to ganger kontinuerlig deriverbar,[1] er $\operatorname{curl}\nabla f = 0$. Det er naturlig å spørre om *omvendingen*: Dersom $\mathbf{F}$ er et vektorfelt med $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, er da $\mathbf{F} = \nabla f$ for en funksjon f?

Tilsvarende, om $\mathbf{F}$ er et to ganger kontinuerlig deriverbart vektorfelt så er $\operatorname{div}\operatorname{curl}\mathbf{F} = 0$. Det naturlige spøsmålet blir da: Om $\operatorname{div}\mathbf{G} = 0$, finnes da et vektorfelt $\mathbf{F}$ med $\mathbf{G} = \operatorname{curl}\mathbf{F}$?

Vi skal se at svaret på begge spørsmålene er ≪ja≫, under visse *topologiske* betingelser. Men for enkelhets skyld skal vi først anta at de gitte feltene er definert i hele rommet – da er i hvert fall disse betingelsene oppfylt.

Bevisene jeg gjengir nedenfor beror på en regel om *derivasjon under integraltegnet*: I den enkleste utgaven sier denne at

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x,y,\dots)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\dots)\,\mathrm{d}x.$$

Regelen kan kanskje virke åpenbar, når man skriver ut definisjonen av den partiellderiverte. Problemet med å gi et rigorøst bevis for den er når grenseoperasjonen skal flyttes innenfor integraltegnet. Jeg skal ikke gå inn på detaljene her, men så lenge f er en kontinuerlig funksjon av to eller flere variable og $\partial f/\partial y$ også er kontinuerlig, så kan det vises at formelen er riktig.

2 Potensialer

La

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$$

være et vektorfelt. En funksjon f kalles et *potensial* for $\mathbf{F}$ dersom $\mathbf{F} = \nabla f$ overalt. Fra innledningen vet vi at det kun kan finnes et potensial dersom

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Heretter antar vi at dette gjelder. Vi definerer

$$f(x,y,z) = \int_0^1 \big(xP(tx,ty,tz) + yQ(tx,ty,tz) + zR(tx,ty,tz)\big)\,\mathrm{d}t.$$

[1] Fra nå av skal jeg uten ytterligere kommentar anta at alle funksjoner og vektorfelt er så mange ganger deriverbare som sammenhengen krever, og at de tilhørende partiellderiverte er kontinuerlige.

Siden $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ er altså

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Vi bruker disse i utregningen nedenfor:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \int_0^1 \Big(P(tx,ty,tz) + xt\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty,tz) + yt\frac{\partial Q}{\partial x}(tx,ty,tz) + zt\frac{\partial R}{\partial x}(tx,ty,tz) \Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \Big(P(tx,ty,tz) + xt\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty,tz) + yt\frac{\partial P}{\partial y}(tx,ty,tz) + zt\frac{\partial P}{\partial z}(tx,ty,tz) \Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \Big(P(tx,ty,tz) + t \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(tx,ty,tz) \Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(tP(tx,ty,tz)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= P(x,y,z).
\end{aligned}$$

På samme måte finner vi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R$$

og dermed $\nabla f = \mathbf{F}$, slik at f virkelig er et potensial for $\mathbf{F}$.

3 Vektorpotensialer

La

$$\mathbf{G} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$$

være et vektorfelt. Et vektorfelt $\mathbf{F}$ kalles et *vektorpotensial* for $\mathbf{G}$ dersom $\mathbf{G} = curlF$ overalt. Fra innledningen vet vi at det kun kan finnes et potensial dersom

$$\operatorname{div} \mathbf{G} = \mathbf{0}.$$

Heretter antar vi at dette gjelder. Vi definerer

$$\begin{aligned}
\widehat{P}(x,y,z) &= \int_0^1 tP(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t, \\
\widehat{Q}(x,y,z) &= \int_0^1 tQ(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t, \\
\widehat{R}(x,y,z) &= \int_0^1 tR(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

og setter

$$\mathbf{F} = (z\widehat{Q} - y\widehat{R})\,\mathbf{i} + (x\widehat{R} - z\widehat{P})\,\mathbf{j} + (y\widehat{P} - x\widehat{Q})\,\mathbf{k}.$$

Jeg vil vise at $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{G}$, men jeg gjør dette bare for $\mathbf{k}$-komponenten. (De andre håndteres tilsvarende.)

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x\widehat{R} - z\widehat{P}) - \frac{\partial}{\partial y}(z\widehat{Q} - y\widehat{R}) \\
&= 2\widehat{R} + x\frac{\partial \widehat{R}}{\partial x} + y\frac{\partial \widehat{R}}{\partial y} + z\frac{\partial \widehat{R}}{\partial z} - z\Big(\frac{\partial \widehat{P}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{R}}{\partial z}\Big)
\end{aligned}$$

hvor jeg har lagt til og trukket fra et ekstra ledd $z\partial\widehat{R}/\partial z$ i siste linje. Men

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widehat{P}}{\partial x}+\frac{\partial\widehat{Q}}{\partial y}+\frac{\partial\widehat{R}}{\partial z} &= \int_0^1 t^2\Big(\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty,tz)+\frac{\partial Q}{\partial y}(tx,ty,tz)+\frac{\partial R}{\partial z}(tx,ty,tz)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^2\operatorname{div}\mathbf{G}(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t = 0,\end{aligned}$$

så vi står igjen med

$$\mathbf{k}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{F} = 2\widehat{R}+x\frac{\partial\widehat{R}}{\partial x}+y\frac{\partial\widehat{R}}{\partial y}+z\frac{\partial\widehat{R}}{\partial z}.$$

Vi finner

$$\begin{aligned}x\frac{\partial\widehat{R}}{\partial x}+y\frac{\partial\widehat{R}}{\partial y}+z\frac{\partial\widehat{R}}{\partial z} &= \int_0^1 t^2\Big(x\frac{\partial R}{\partial x}(tx,ty,tz)+y\frac{\partial R}{\partial y}(tx,ty,tz)+z\frac{\partial R}{\partial z}(tx,ty,tz)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[t^2R(tx,ty,tz)\Big]_{t=0}^{t=1}-\int_0^1 2tR(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t \\ &= R(x,y,z)-2\widehat{R}(x,y,z).\end{aligned}$$

Til slutt står vi altså igjen med

$$\mathbf{k}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{F} = R.$$

Tilsvarende vises

$$\mathbf{i}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{F} = P,\quad \mathbf{j}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{F} = Q$$

slik at vi har

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = P\,\mathbf{i}+Q\,\mathbf{j}+R\,\mathbf{k} = \mathbf{G}.$$

4 Hva med andre områder?

Begge bevisene over virker uten forandring dersom definisjonsområdet for det gitte vektorfeltet er *stjerneformet*, altså dersom det inneholder linjestykket mellom origo og hvilket som helst annet punkt. Det kan også være stjerneformet med hensyn på et annet punkt enn origo. Men for andre typer områder kan begge testene være feil.

Dersom $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ følger det direkte fra Stokes' teorem at $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ for enhver lukket kurve C som er randen til en flate inneholdt i området. Men dersom vi kan skrive $\mathbf{F} = \nabla f$ så må dette integralet være 0 for *alle* lukkede kurver. Dersom det finnes en lukket kurve som ikke er randen til en flate i området, så kan det tenkes at $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \neq 0$ for en slik kurve. Et område kalles *enkeltsammenhengende* dersom enhver lukket kurve i området er randen til en flate i området. Hvis området er enkeltsammenhengende, viser det seg at ethvert rotasjonsfritt[2] vektorfelt i området har et potensial. Hvis området ikke er enkeltsammenhengende, så lar det seg gjøre å finne et rotasjonsfritt vektorfelt uten noe potensial.

Likedan, dersom $\operatorname{div}\mathbf{G} = 0$ følger det direkte fra divergensteoremet av $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = 0$ for enhver flate S som er randen til et legeme inneholdt i området. Men om det finnes en lukket flate S i området som ikke er randen til et slikt legeme, så kan det tenkes at integralet ikke er null. Dersom $\mathbf{G} = \operatorname{curl}\mathbf{F}$ så følger det av Stokes' teorem at $\iint_S \mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = 0$ for enhver *lukket* flate.

[2]Et vektorfelt $\mathbf{F}$ kalles *rotasjonsfritt* dersom $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Det viser seg at dersom enhver lukket flate i området virkelig er randen til et legeme inneholdt i området, så er $\operatorname{div} \mathbf{G} = 0$ en tilstrekkelig betingelse for eksistensen av et vektorpotensial for $\mathbf{G}$. I motsatt fall er betingelsen ikke tilstrekkelig.

Situasjonen med vektorpotensialer er for øvrig mer komplisert enn for skalare potensialer. De sistnevnte er jo entydige med unntak av en konstant man kan legge til. Men om $\mathbf{G}$ har to vektorpotensialer $\mathbf{F}_1$ og $\mathbf{F}_2$, så er alt man kan si at $\operatorname{curl}(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) = \mathbf{0}$, som impliserer at $\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 = \nabla f$ for en skalar funksjon f (forutsatt at området er enkeltsammenhengende). Eller sagt på en annen måte: Om $\mathbf{F}$ er et vektorpotensial for $\mathbf{G}$ så er også $\mathbf{F} + \nabla f$ det, samme hva f måtte være for funksjon.