SIF5005 Matematikk 2, våren 2003

Hjemmeøving 5

Veiledning og innlevering: uke 13.

Bortsett fra de to siste oppgavene, er dette tidligere eksamensoppgaver der dataene er noe endret.

Oppgave 1 Et legeme T med konstant massetetthet 1 og grunnflate i xy–planet er begrenset av flatene

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{og} \quad x^2 + y^2 = a^2$$

der a er en positiv konstant. Bestem a slik at tyngdepunktet til T blir (0,0,3).

Oppgave 2 Legemet T er begrenset av flatene $z = 2 - x^2 - y^2$ og $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, og har konstant massetetthet lik 3/5.

a) Skisser T og vis at massen til T er $\pi/2$. Finn tyngdepunktet til T.

b) Anta nå at T flyter i et vannbad med symmetriaksen (z–aksen i **a)**) vertikalt og den butte enden ned. Hvor dypt flyter T i vannet?

Hint: Etter Arkimedes' lov er massen av den vannmengden T fortrenger lik massen av T. Massetettheten for vann kan du regne som 1 kg / liter.

Oppgave 3

a) Beregn volumet av legemet avgrenset av flatene

$$z = 2x^2 + y^2 \quad \text{og} \quad z = 2 - y^2.$$

b) Et insekt beveger seg (mot urviseren sett ovenfra) langs skjæringskurven mellom de to flatene. Anta at temperaturen i punktet (x, y, z) er gitt ved funksjonen

$$T(x, y, z) = 10 + (x^2 + y^2 + 2z^2)/3.$$

Hvor stor temperaturendring per lengdeenhet langs skjæringskurven opplever insektet i punktet $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 3/2)$?

Oppgave 4. Et legeme T har følgende beskrivelse i kulekoordinater:

$$0 \le \rho \le \sin\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi/2, \quad 0 \le \varphi \le \pi/2.$$

Finn massen til T når massetettheten δ er gitt ved $\delta = \cos\theta$ i kulekoordinater. Bestem også z–koordinaten til tyngdepunktet.

Oppgave 5. En modell av en idrettshall er avgrenset av flatene $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ og $z = 2 - xy$.

a) Beregn volumet av modellen.

b) Overflaten til modellen består av tre flater, bunnen, taket og sideveggen. Beregn arealet av hver av de tre flatene.

Oppgave 6. Finn middelverdien

$$\overline{f} = \frac{1}{V} \iiint_T f(x, y, z)\, dV$$

for avstanden $f(x, y, z) = |z|$ til xy–planet, for punktene i området avgrenset av de tre koordinatplanene og planet $x + 2y + z = 6$.

Oppgave 7. En wire med konstant massetetthet k har formen

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t \quad \text{for } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Finn treghetsmomentet for wiren med hensyn på z–aksen.