SIF5005 MATEMATIKK 2 VÅR 2003

LØSNINGSFORSLAG ØVING 1

Oppgave 1. Samler alle variabelleddene på en side av likhetstegnet og får ligningen

$$(x^2 - x) + (y^2 + 2y) + (z^2 - 2z) = 0.$$

Deretter utvides parentesene til fullstendige kvadrater, og vi får

$$\begin{aligned}(x^2 - x + 1/4) + (y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) &= 1/4 + 1 + 1 \\ (x - 1/2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 &= (3/2)^2.\end{aligned}$$

Dette betyr at kuleflaten har radius $3/2$ og sentrum i punktet $(1/2, -1, 1)$.

Oppgave 2. Siden akselerasjonsvektoren fremkommer ved å derivere hastighetsvektoren $\mathbf{v}(t)$ med hensyn på t, har vi

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\,dt = \int (2\mathbf{j} - 6t\mathbf{k})\,dt = 2t\mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k} + \mathbf{c}_1,$$

hvor $\mathbf{c}_1$ er en konstantvektor. Siden $\mathbf{v}(0) = 5\mathbf{k}$, må vi ha at $\mathbf{c}_1 = 5\mathbf{k}$, og dette betyr at $\mathbf{v}(t) = 2t\mathbf{j} + [5 - 3t^2]\mathbf{k}$.

Hastighetsvektoren fremkommer ved å derivere posisjonsvektoren $\mathbf{r}(t)$ med hensyn på t, så vi har

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)\,dt = \int (2t\mathbf{j} + [5 - 3t^2]\mathbf{k})\,dt = t^2\mathbf{j} + [5t - t^3]\mathbf{k} + \mathbf{c}_2,$$

hvor $\mathbf{c}_2$ er en konstantvektor. Siden $\mathbf{r}(0) = 2\mathbf{i}$, må vi ha at $\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{i}$, og dette gir $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + [5t - t^3]\mathbf{k}$. Posisjonsvektoren til partikkelen i $t = 10$ blir da $\mathbf{r}(10) = 2\mathbf{i} + 100\mathbf{j} - 950\mathbf{k}$.

Oppgave 3. La P_1 være partikkelen hvis bane er gitt av parameterfremstillingen $x = t, y = 2t^2$, og la P_2 være den andre partikkelen. Ved å sette inn $x = t$ i uttrykket $y = 2t^2$, får vi $y = 2x^2$, og siden $t \geq 0$ medfører at $x \geq 0$, ser vi at banen til P_1 er gitt av grafen til ligningen

$$y = 2x^2, x \geq 0$$

(dvs "høyre" del av ligningen $y = 2x^2$).

Se nå på P_2. Siden vi generelt har at $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, får vi

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{3/2})^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = (\sqrt{3/2})^2.$$

Dette betyr at P_2 beveger seg i en sirkel med radius $\sqrt{3/2}$ omkring origo, med start i $x = \sqrt{3/2}, y = 0$. Følgelig vil banene til de to partiklene krysse hverandre.

Se nå på P_1 igjen. Når krysser den banen til P_2? Jo, det skjer når dens avstand til origo er $\sqrt{3/2}$, dvs når

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 4x^4} = \sqrt{3/2}.$$

Dette gir fjerdegradsligningen $4x^4 + x^2 - 3/2 = 0$, som kan ses på som en andregradsligning med variabel x^2. Vi får da

$$x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 4 \cdot (-3/2)}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm 5}{8},$$

dvs $x^2 = 1/2$ (x^2 kan ikke være negativ). Dette medfører at $x = \sqrt{1/2}$ eller $x = -\sqrt{1/2}$, men siden $x \geq 0$ alltid gjelder for P_1, er $x = \sqrt{1/2}$ eneste mulighet.

Siden $y = 2x^2$ alltid gjelder for P_1, ser vi at de to banene krysser hverandre i punktet $x = \sqrt{1/2}, y = 1$. Siden $x = t$ gjelder for P_1, ser vi at denne partikkelen når krysningspunktet når $t = \sqrt{1/2}$. Hvor befinner P_2 seg ved dette tidspunktet? For denne partikkelen gjelder $y = \sqrt{3/2}\sin t$, så når $t = \sqrt{1/2}$ er $y \approx 0.8$. Dette betyr at de to partiklene ikke kolliderer.

Oppgave 4. Generelt har vi at en linje med parameterfremstilling

$$x = a_1 + at, \quad y = b_1 + bt, \quad z = c_1 + ct$$

passerer gjennom punktet (a_1, b_1, c_1), og er parallell med vektoren $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Vi må derfor finne ut om de to vektorene

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= -6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \\ \mathbf{v}_2 &= 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 1\mathbf{k} \end{aligned}$$

er parallelle. For å gjøre dette kan vi regne ut kryssproduktet $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ (husk at to vektorer i rommet er parallelle hvis og bare hvis deres kryssprodukt er nullvektoren), men en raskere metode er å observere direkte at $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{v}_2$. Dette viser at vektorene (og derfor også linjene) er parallelle.

Oppgave 5. Se på figur 12.5.6 på side 744 i Edwards og Penney, eller figur 8.4.2 i Lorentzen et al. Hvis Δt er et tidsintervall, er $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)$ vektoren som forbinder "tuppene" av $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$ og $\mathbf{r}(t_0)$. Vektoren

$$\frac{\Delta \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)]$$

er parallell med denne. La θ betegne vinkelen mellom $\frac{\Delta \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}$ og en tangentvektor $\mathbf{T}$ i punktet bestemt av $\mathbf{r}(t_0)$. Ved å velge Δt liten nok kan vi få θ til å bli vilkårlig liten, og vi kan tenke på θ som en kontinuerlig funksjon av t, dvs $\theta = \theta(t)$. Dette betyr at

$$\lim_{\Delta t \to 0} \theta(t) = 0,$$

noe som medfører at vektoren

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)]$$

er parallell med $\mathbf{T}$.

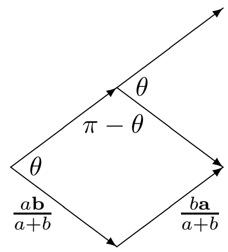
Oppgave 6. *Forslag 1:* Vi har at $\mathbf{c} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, hvor $\mathbf{u} = \frac{b\mathbf{a}}{a+b}$ og $\mathbf{v} = \frac{a\mathbf{b}}{a+b}$. Siden $a > 0$ og $b > 0$, har $\mathbf{u}$ samme retning som $\mathbf{a}$ og $\mathbf{v}$ samme retning som $\mathbf{b}$. Det er derfor nok å vise at $\mathbf{c}$ halverer vinkelen mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

Siden $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$, er parallellogrammet utspent av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ en rombe. Vektoren $\mathbf{c}$ danner en diagonal i denne romben, og på grunn av symmetrien må $\mathbf{c}$ halvere vinkelen mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

Forslag 2: La θ betegne vinkelen mellom $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, la ψ_1 betegne vinkelen mellom $\mathbf{a}$ og $\mathbf{c}$, og la ψ_2 betegne vinkelen mellom $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$. Da gjelder

$$0 \leq \psi_1, \psi_2 \leq \theta \leq \pi.$$

La oss finne lengden c av $\mathbf{c}$. Se på figuren nedenfor



Ved å bruke cosinussetningen får vi

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{b^2a^2}{(a+b)^2} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^2} - 2 \cdot \frac{ba}{a+b} \cdot \frac{ab}{a+b} \cdot \cos(\pi - \theta) \\ &= \frac{2a^2b^2}{(a+b)^2}[1 - \cos(\pi - \theta)] \\ &= \frac{2a^2b^2}{(a+b)^2}[1 + \cos\theta], \end{aligned}$$

hvor vi brukte at $\cos(\pi - x) = -\cos x$ for $x \in [0, \pi]$. Nå kan vi regne ut prikkproduktet $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ på to måter. Vi har

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \frac{b\mathbf{a} + a\mathbf{b}}{a+b} = \frac{a^2b(1 + \cos\theta)}{a+b},$$

samtidig som vi har

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = ac\cos\psi_1 = \frac{\sqrt{2}a^2b\sqrt{1 + \cos\theta}\cos\psi_1}{a+b}.$$

Dette gir

$$\cos^2\psi_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2},$$

og på samme måte har vi

$$\cos^2\psi_2 = \cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Anta nå at $\cos\psi_1 = -\cos\frac{\theta}{2}$. Siden $\frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ får vi da at $\psi_1 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Hvis $\cos\psi_2 = -\cos\frac{\theta}{2}$ får vi $\psi_2 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, og likheten $\theta = \psi_1 + \psi_2$ medfører at $\psi_1 = \psi_2 = \frac{\pi}{2}$ (husk at $0 \leq \theta \leq \pi$). Hvis $\theta = \pi$ er vi framme, hvis ikke har vi en motsigelse. I det siste tilfellet må vi da ha at $\cos\psi_1 = \cos\frac{\theta}{2}$, noe som gir $\psi_1 = \frac{\theta}{2}$. Dette gir igjen at $\psi_2 = \theta - \psi_1 = \frac{\theta}{2}$, og vi er framme. Tilsvarende kan vi se på $\cos\psi_2$ og resonnere på samme måte.

Oppgave 7. (a) La $\mathbf{r}(t)$ betegne golfballens posisjonsvektor, la $\mathbf{v}(t)$ betegne dens hastighetsvektor, og la $\mathbf{a}(t)$ betegne dens akselerasjonsvektor. Vi har da $\mathbf{a}(t) = -g\mathbf{k}$, som gir

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\,dt = \int (-g\mathbf{k})\,dt = -gt\mathbf{k} + \mathbf{c}_1,$$

hvor $\mathbf{c}_1$ er en konstantvektor. Siden $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ får vi $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 - gt\mathbf{k}$, og dette gir

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)\,dt = \int (\mathbf{v}_0 - gt\mathbf{k})\,dt = t\mathbf{v}_0 - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{k} + \mathbf{c}_2,$$

hvor $\mathbf{c}_2$ er en konstantvektor. Nå gir $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ at $\mathbf{c}_2 = \mathbf{0}$, og $\mathbf{r}(4) = 200\mathbf{i} + 200\mathbf{j}$ gir da at

$$\mathbf{v}_0 = 50\mathbf{i} + 50\mathbf{j} + 2g\mathbf{k}.$$

(b) Nå er $\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{i} - g\mathbf{k}$, som gir

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\,dt = \int (2\mathbf{i} - g\mathbf{k})\,dt = 2t\mathbf{i} - gt\mathbf{k} + \mathbf{c}_1,$$

hvor $\mathbf{c}_1$ er en konstantvektor. Siden $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ får vi at $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + 2t\mathbf{i} - gt\mathbf{k}$. Dette gir

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)\,dt = \int (\mathbf{v}_0 + 2t\mathbf{i} - gt\mathbf{k})\,dt = t\mathbf{v}_0 + t^2\mathbf{i} - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{k} + \mathbf{c}_2,$$

hvor $\mathbf{c}_2$ er en konstantvektor. Likheten $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ at $\mathbf{c}_2 = \mathbf{0}$, og $\mathbf{r}(4) = 200\mathbf{i} + 200\mathbf{j}$ gir da at

$$\mathbf{v}_0 = 46\mathbf{i} + 50\mathbf{j} + 2g\mathbf{k}.$$

(c) Her er det bare å sette inn uttrykket for $\mathbf{v}_0$ i uttrykket for $\mathbf{r}(t)$ i de to tilfellene. For (a) får vi

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{v}_0 - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{k} = 50t\mathbf{i} + 50t\mathbf{j} + gt(2 - \frac{1}{2}t)\mathbf{k},$$

og for (b) får vi

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{v}_0 + t^2\mathbf{i} - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{k} = t(46 + t)\mathbf{i} + 50t\mathbf{j} + gt(2 - \frac{1}{2}t)\mathbf{k}.$$

Oppgave 8. Det første som bør gjøres her er å tegne alt sammen i xy-planet. På grunn av tekniske problemer er ikke dette blitt gjort i løsningsforslaget.

(a) La $\mathbf{r}_P(t)$ og $\mathbf{r}_Q(t)$ betegne posisjonsvektorene til henholdsvis punktet P og punktet Q. Ved et tidspunkt t danner $\mathbf{r}_P(t)$ vinkelen $10\pi t$ med den positive x-aksen, så vi får umiddelbart at

$$\mathbf{r}_P(t) = 20\cos(10\pi t)\mathbf{i} + 20\cos(10\pi t)\mathbf{j}.$$

Hvor lang er projeksjonen $\mathbf{p}$ av staget ned på x-aksen ved dette tidspunktet? Ved å bruke Pytagoras ser vi at

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{40^2 - (20\sin(10\pi t))^2} = 20\sqrt{4 - \sin^2(10\pi t)}.$$

Dette gir

$$\mathbf{r}_Q(t) = 20\cos(10\pi t)\mathbf{i} + 20\sqrt{4 - \sin^2(10\pi t)}\mathbf{i} = 20\left[\cos(10\pi t) + \sqrt{4 - \sin^2(10\pi t)}\right]\mathbf{i}.$$

(b) La $\mathbf{v}_Q(t)$ betegne hastighetsvektoren til punktet Q. Da har vi

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_Q(t) &= \mathbf{r}'_Q(t) \\
&= 20\left(\frac{d}{dt}\left[\cos(10\pi t) + \sqrt{4 - \sin^2(10\pi t)}\right]\right)\mathbf{i} \\
&= -200\pi\sin(10\pi t)\left[1 + \frac{\cos(10\pi t)}{\sqrt{4 - \sin^2(10\pi t)}}\right]\mathbf{i}.
\end{aligned}$$