SIF5005 MATEMATIKK 2 VÅR 2003

Løsningsforslag Hjemmeøving 2

Oppgave 1. Først finner vi ligningen for krumningen:

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{(1+(y')^2))^{3/2}} = \frac{x^{-2}}{(1+x^{-2})^{3/2}}.$$

For å finne den største krumningen setter vi den deriverte av funksjonen for krumningen lik null.

$$\kappa'(x) = \frac{-2x^{-3}(1+x^{-2})+3x^{-5}}{(1+x^{-2})^{5/2}} = \frac{-2(x^2+1)+3}{x^5(1+x^{-2})^{5/2}} = \frac{1-2x^2}{(x^2+1)^{5/2}} = 0$$

$$x^2 = 1/2$$

$$x = \pm 1/\sqrt{2}$$

Siden funksjonen $\ln x$ kun er definert for positive verdier, veit vi da at krumningen er størst i punktet $x = 1/\sqrt{2}$ (tegn fortegnskjema).

Oppgave 2. Enhetstangenten er gitt ved

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\ \mathbf{i} + \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\ \mathbf{j}}{\sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{t}}} = \frac{\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\ \mathbf{i} + \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\ \mathbf{j}}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = \sin t\ \mathbf{i} + \cos t\ \mathbf{j}.$$

Underveis har vi oppdaget at $|\mathbf{r}'(t)| = 1/\sqrt{t}$, med andre ord $ds/dt = 1/\sqrt{t}$.

Dermed er

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = (\cos t\ \mathbf{i} - \sin t\ \mathbf{j})\sqrt{t}$$

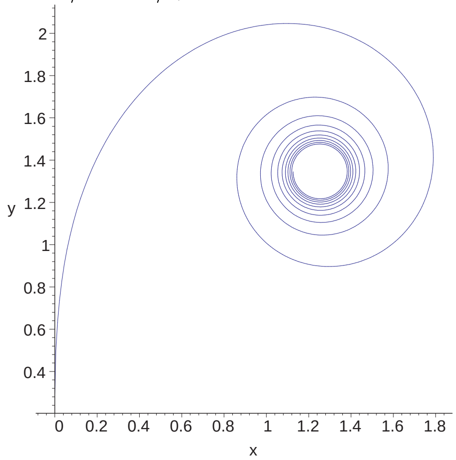
som gir krumningen

$$\kappa(t) = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \sqrt{t}$$

og hovednormalen

$$\mathbf{N}(t) = \frac{d\mathbf{T}/ds}{\kappa} = \cos t\ \mathbf{i} - \sin t\ \mathbf{j}.$$

(Til høyre ser du en tegning av Eulers spiral.)



Oppgave 3. Vi finner

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= (3-3t^2)\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + (3+3t^2)\mathbf{k},\\
\mathbf{r}''(t) &= -6t\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 6t\mathbf{k},\\
|\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{(3-3t^2)^2 + (6t)^2 + (3+3t^2)^2} = \sqrt{18t^4 + 36t^2 + 18}\\
&= 3\sqrt{2}(t^2+1).
\end{aligned}
$$

Videre

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{k} & \mathbf{k} \\ 3-3t^2 & 6t & 3+3t^2 \\ -6t & 6 & 6t \end{vmatrix}\\
&= \big((6t)^2 - 6(3+3t^2)\big)\mathbf{i} - \big((3-3t^2)6t + 6t(3+rt^2)\big)\mathbf{j}\\
&\quad + \big((3-3t^2)6 + (6t)^2\big)\mathbf{k}\\
&= 18\big((t^2-1)\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + (t^2+1)\mathbf{k}\big)
\end{aligned}
$$

slik at

$$
|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = 18\sqrt{(t^2-1)^2 + (2t)^2 + (t^2+1)^2} = 18\sqrt{2}(t^2+1).
$$

Til sist ender vi med krumningen

$$
\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{1}{3(t^2+1)^2}.
$$

Oppgave 4. Både $S_1\colon x = y^2 + z^2$ og $S_2\colon y = x^2 + z^2$ er paraboloider, men de har åpningen i forskjellige retninger; S_1 i positiv x-retning og S_2 i positiv y-retning.

Anta at flatene skjærer hverandre, da gjelder i et skjæringspunkt

$$
(y^2 + z^2, y, z) = (x, x^2 + z^2, z)
$$

Altså er $x = y^2 + z^2$ og $y = x^2 + z^2$, noe som gir oss at $x - y^2 = z^2 = y - x^2$, altså at

$$
\begin{aligned}
x + x^2 &= y + y^2\\
x^2 + x + \tfrac{1}{4} &= y^2 + y + \tfrac{1}{4}\\
(x + \tfrac{1}{2})^2 &= (y + \tfrac{1}{2})^2\\
x + \tfrac{1}{2} &= \pm(y + \tfrac{1}{2})
\end{aligned}
$$

Siden $x = y^2 + z^2$ og $y = x^2 + z^2$ så er både x og y positive, derfor har vi at $x + \frac{1}{2} = y + \frac{1}{2}$, dvs. $x = y$, altså skjærer paraboloidene hverandre i en plan kurve.

La oss beskrive kurven hvor planene skjærer hverandre. Setter vi inn $y = x$ i ligningen for en av flatene får vi $x = x^2 + z^2$, som er ekvivalent med

$$
(x - \tfrac{1}{2})^2 + z^2 = \tfrac{1}{4}.
$$

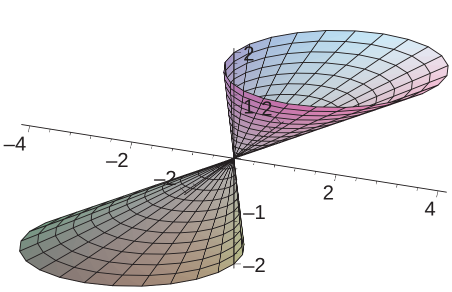
Skjæringskurven projiseres altså til en sirkel i xz-planet, og selv er den da en ellipse (projeksjonen er på skrå i forhold til planet $x = y$). Den kan passe parametriseres ved

$$
\left.\begin{aligned}
x = y &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos t,\\
z &= \tfrac{1}{2}\sin t
\end{aligned}\right\} \qquad 0 \le t \le 2\pi.
$$

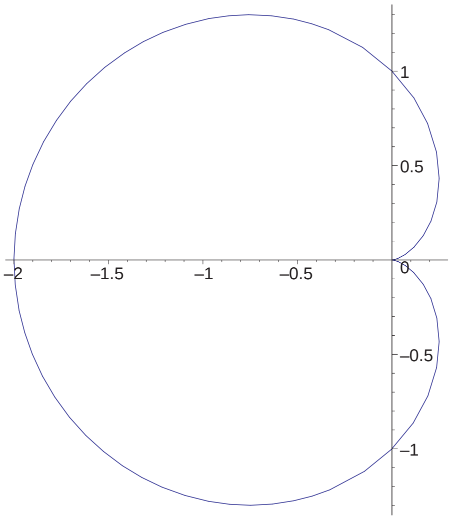
Oppgave 5. Vi veit at $r = \sqrt{x^2+y^2}$ og at $r\cos\theta = x$. $r = 2z\cos\theta$, altså er $r^2 = 2zr\cos\theta = 2zx$. Vi har da at

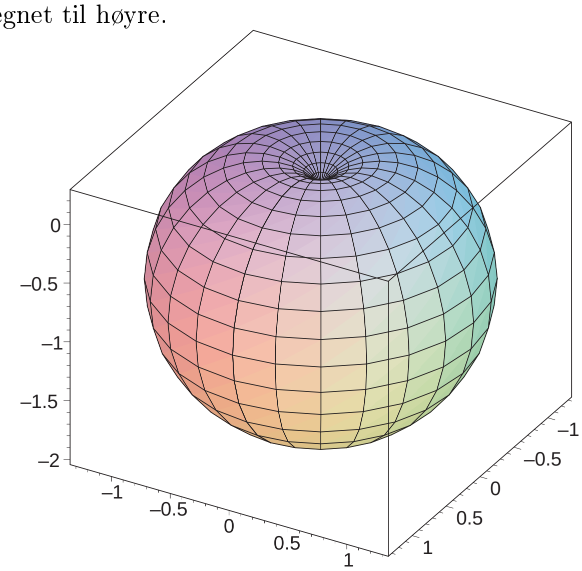
$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 2zx\\
(x-z)^2 + y^2 &= z^2
\end{aligned}
$$

Vi ser da at snittet med flaten $z = k$ vil være en sirkel med radius $|k|$ og sentrum i $(x, y) = (k, 0)$. Flaten blir en skjev kjegle.



Oppgave 6. Kardioiden $r = 1 - \cos\theta$ i polarkoordinater er tegnet til venstre.
Flaten $\rho = 1 - \cos\phi$ i kulekoordinater er tegnet til høyre.





Når du bytter ut r og θ i ligningen for kardioiden med ρ og ϕ, får du ligningen for den andre flaten. I det første tilfellet måles vinkelen θ fra x-aksen, i det andre tilfellet måles vinkelen ϕ fra z-aksen. Flaten oppstår ved at vi roterer kardioiden om x-aksen og så dreier hele figuren så x-aksen kommer på z-aksens plass. Den resulterende flaten minner om et eple.

Oppgave 7. Funksjonen $f_1(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ hører til figur c, for figur c har radiell symmetri og oppfører seg som $\cos(x^2)$ langs x-aksen.

Funksjonen $f_2(x, y) = \cos(e^x + e^y)$ hører til figur b. Legg merke til svingningene i første kvadrant (fremre høyre hjørne i figuren), hvor $e^x + e^y$ vokser fort. I tredje kvadrant (bakre venstre hjørne) går $e^x + e^y$ fort mot null, og $f_2(x, y)$ går mot 1.

Funksjonen $f_3(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ hører til figur a, for når x og y går mot 0, så går $x^2 + y^2$ mot null, og dermed $\ln(x^2 + y^2)$ mot minus uendelig. Legg også merke til den radielle symmetrien.

Funksjonen $f_4(x, y) = e^{-xy}$ hører til figur d, for langs linjen $x = y$ vil funksjonen gå mot 0 ($f(x, x) = e^{-x^2}$), og langs aksen $x = -y$ vil funksjonen gå mot uendelig ($f(x, -x) = e^{x^2}$).

Oppgave 8. Dersom vi holder x konstant, f.eks. $x = k$, så vil

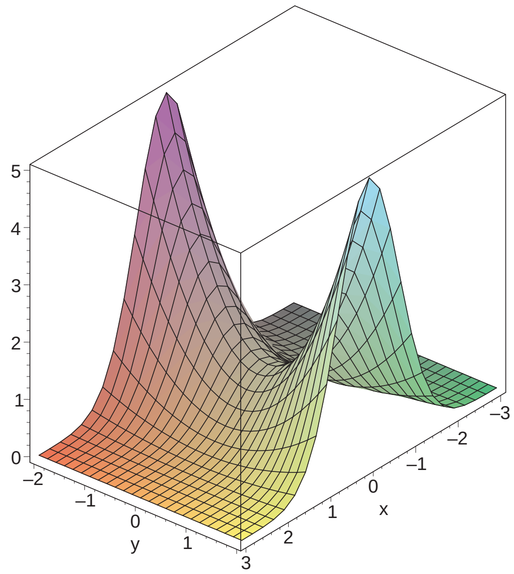
$$\begin{aligned} z &= e^{-x^2}(y^2 - 1) \\ &= e^{-k^2}(y^2 - 1) \\ &= C_1(y^2 - 1) \end{aligned}$$

hvor $C_1 = e^{-k^2}$ er en ny konstant, altså har funskjonen en form som en parabel for en konstant x.

Hold nå y konstant, $y = k$, så vil

$$\begin{aligned} z &= e^{-x^2}(y^2 - 1) \\ &= e^{-x^2}(k^2 - 1) \\ &= e^{-x^2} C_2 \end{aligned}$$

hvor $C_2 = (k^2 - 1)$ er en ny konstant. Vi ser da at funksjonen har form som en normalfordelingskurve for en konstant y.



Oppgave 9. Nivåflaten til f, gitt ved $f(x,y,z) = C$, kan skrives

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 = Ce^C.$$

Dette er en rotasjonsellipsoide med like lange halvakser i x- og y-retning, og dobbelt så lang halvakse i z-retning. På normalform for ellipsoider:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1$$

med

$$a = b = \sqrt{C}e^{C/2}, \quad c = 2\sqrt{C}e^{C/2}.$$

Når C vokser, så vokser også ellipsoiden i alle retninger.

Oppgave 10. Funksjonen $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2)$ er kontinuerlig i alle punkter bortsett fra punktet $(0,0)$, for der er ikke funksjonen definert.

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos\theta\ln r^2 = \cos\theta(r\ln r^2)$$

$$\lim_{r\to 0} r\ln r^2 = \lim_{r\to 0}\frac{\ln r^2}{r^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{r\to 0}\frac{\frac{1}{r^2}2r}{-r^{-2}} = \lim_{r\to 0} -2r = 0$$

Vi ser dermed at dersom vi definerer $f(0,0) = 0$, så vil (den utvidede funksjonen) f være kontinuerlig over alt.

Siden funksjonen $\sqrt{x^2+y^2}$ er kontinuerlig, og den er 0 kun i punktet $(0,0)$, så vil også funksjonen $g(x,y) = \frac{x\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ være kontinuerlig i alle punkter bortsett fra punktet 0.

Nå er

$$g(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\ln r^2}{r} = \cos\theta\ln r^2$$

derfor vil

$$\lim_{r\to 0} g(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0}\cos\theta\ln r^2 = \pm\infty$$

(untatt når $\cos\theta = 0$). Vi kan derfor ikke utvide $g(x,y)$ til en ny funksjon som er kontinuerlig i alle punkt.