SIF5005 MATEMATIKK 2 VÅR 2003

LØSNINGSFORSLAG HJEMMEØVING 4

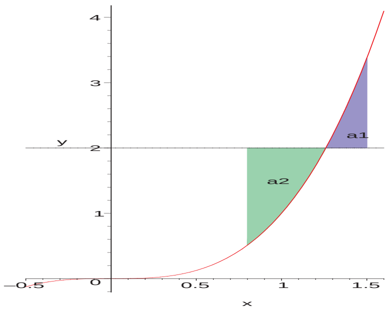
Oppgave 1. Vi skal sette opp integralet $I = \iint\limits_R f(x,y)dA$ som et iterert dobbeltintegral i begge integrasjonsrekkefølger over et gitt område R.

a) 1. Området vi her skal integrerer over svarer til a_1 i figur 1. Når vi integrer først i x-retning ser vi at x går fra $\sqrt[3]{y}$ til a mens y går fra $y = 2$ til $y = a^3$. Dette gir

$$I = \int_2^{a^3} \int_{\sqrt[3]{y}}^{a} f(x,y)\,dxdy.$$

Ved integrasjon i y-retning først går y fra $y = 2$ til $y = x^3$ mens x går fra $\sqrt[3]{2}$ til a. Dette gir

$$I = \int_{\sqrt[3]{2}}^{a} \int_2^{x^3} f(x,y)\,dydx.$$



FIGUR 1. De to områdene i oppgave 1 a.

2. Her er $a < 2^{\frac{1}{3}}$ og området vi integrerer over svarer til a_2 i figur 1. Ved integrasjon først i x-retning vil x nå i motsetning til i punkt 1 gå fra a til $\sqrt[3]{y}$ mens vi har $a^3 \leq y \leq 2$. Dette gir

$$I = \int_{a^3}^{2} \int_a^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dxdy.$$

Når vi skal integrere i y-retning gjør vi som over og bytter på grensene fra punkt 1. Da får vi

$$I = \int_a^{\sqrt[3]{2}} \int_{x^3}^{2} f(x,y)\,dydx.$$

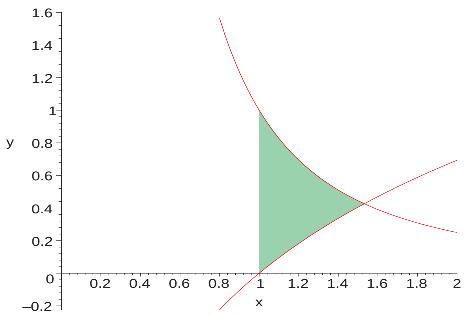
b) Når vi integrerer først i y-retning, ser vi fra figur 2 at $1 \leq x \leq b$ og at $\ln x \leq y \leq x^{-2}$. Fra dette fås

$$I = \int_1^b \int_{\ln x}^{x^{-2}} f(x,y)\,dydx.$$

Før å gjøre integrasjonen først i x-retning må vi skrive om kurvene som definerer R slik at vi får dem på formen $x = f(y)$. Kurven $y = \ln x$ blir $x = e^y$ og $y = x^{-2}$ blir $x = y^{-\frac{1}{2}}$. Videre må vi dele R opp i to områder R_1 og R_2 gitt ved

R_1: $0 \leq y \leq \ln b = b^{-2}$ og $1 \leq x \leq e^y$. Dette svarer til nedre del av det skraverte området i figur 2. Integralet blir $I_1 = \int_0^{\ln b} \int_1^{e^y} f(x,y)\,dxdy$.

Date: 10. mars 2003.



FIGUR 2. Integrasjonsområdet i oppgave 1 b.

R_2: $\ln b \leq y \leq 1$ og $1 \leq x \leq y^{-\frac{1}{2}}$. Dette svarer til øvre del av det skraverte området i figur 2. Integralet blir $I_2 = \int_{\ln b}^{1} \int_{1}^{y^{-\frac{1}{2}}} f(x,y)\, dxdy$.

Vi får nå svaret ved å summere integralene over disse to områdene, noe som gir

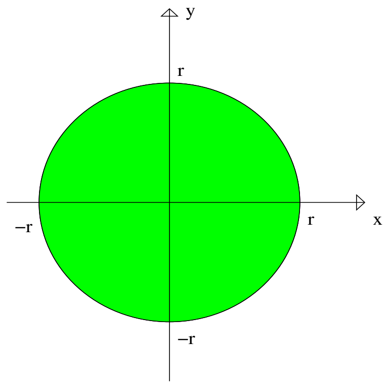
$$I = I_1 + I_2 = \int_0^{\ln b} \int_1^{e^y} f(x,y)\, dxdy + \int_{\ln b}^{1} \int_1^{y^{-\frac{1}{2}}} f(x,y)\, dxdy.$$

c) Ligningen for en sirkel med radius r og sentrum i origo er gitt ved $x^2 + y^2 = r^2$. Dersom vi løser denne ligningen med hensyn på x får vi $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$, der $-r \leq y \leq r$. Ut i fra dette kan vi sette opp integralet hvor vi gjør integrasjonen i x-retning først. Det gir

$$I = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x,y)\, dxdy.$$

Ved å bytte rollen til x og y i argumentet over får vi at integralet først med hensyn på y blir

$$I = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x,y)\, dydx.$$



FIGUR 3. Sirkelen i oppgave 1 c.

d) Vi tar integralet over det ytre rektanglet $R_y = \{(x,y) | -2 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 2\}$ minus verdien av integralet over det indre rektanglet $R_i = \{(x,y) | -1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$. Siden vi integrerer over rektangler blir integrasjonsgrensene uavhengig av integrasjonsrekkefølgen og vi får

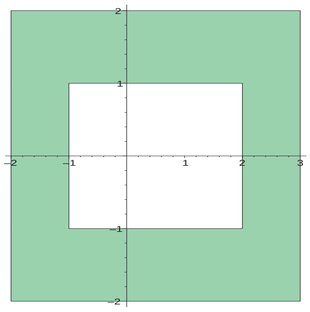
$$I_y = \int_{-2}^{2} \int_{-2}^{3} f(x,y)\, dxdy = \int_{-2}^{3} \int_{-2}^{2} f(x,y)\, dydx$$

$$I_i = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{2} f(x,y)\, dxdy = \int_{-1}^{2} \int_{-1}^{1} f(x,y)\, dydx$$

Dette gir

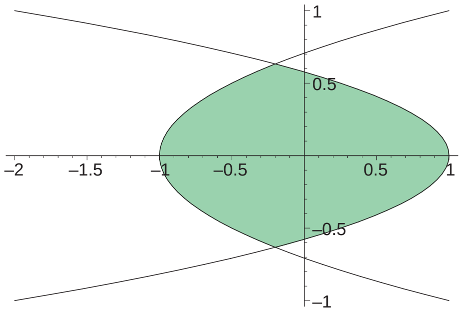
$$I = I_y - I_i.$$

Her finnes det flere muligheter. For eksempel kunne man delt det skraverte området i figur 4 opp i to horisontale og to vertikale striper og summert integralene over hver av stripene. Her er det viktig å passe på at stripene ikke overlapper slik at noen områder integreres flere ganger.



FIGUR 4. Rektanglene i oppgave 1 d.

e) For å integrerer først med hensyn på x må vi finne ut hvor de gitte kurvene krysser hverandre. Vi løser $2y^2 - 1 = 1 - 3y^2$ og får $y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$. Innsatt i en av ligningene gir dette $x = 2 \cdot \frac{2}{5} - 1 = -\frac{1}{5}$ og kurvenes skjæringspunkter er $(-\frac{1}{5}, \pm\sqrt{\frac{2}{5}})$. Med dette blir



FIGUR 5. Oppgave 1 e.

integralet når vi integrerer først i x-retning gitt ved

$$\int_{-\sqrt{\frac{2}{5}}}^{\sqrt{\frac{2}{5}}} \int_{2y^2-1}^{1-3y^2} f(x,y)\,dxdy.$$

For å integrere først med hensyn på y blir vi nødt til å dele R opp i to områder, integrerer over hver av dem og addere svarene. For å gjøre dette må vi skrive kurvene som funksjoner av y med hensyn på x.

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(x+1)} \quad \text{og} \quad y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}(1-x)}.$$

Fra tidligere har vi at kurvene skjærer hverandre når $x = -\frac{1}{5}$. De to områdene vi integrerer over blir da

R_1: $-1 \leq x \leq -\frac{1}{5}$ og $\sqrt{\frac{1}{2}(x+1)} \leq y \leq \sqrt{\frac{1}{2}(x+1)}$.

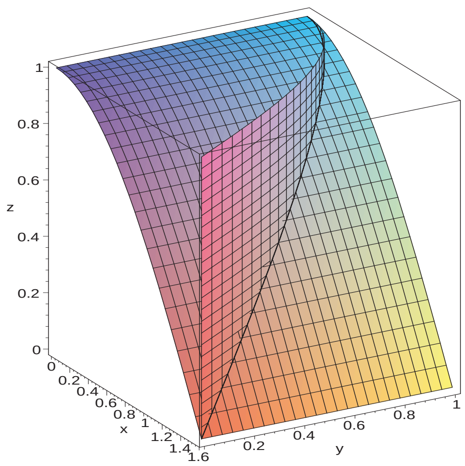
R_2: $-\frac{1}{5} \leq x \leq -1$ og $-\sqrt{\frac{1}{3}(1-x)} \leq y \leq \sqrt{\frac{1}{3}(1-x)}$.

Dette gir

$$I = I_1 + I_2 = \int_{-1}^{-\frac{1}{5}} \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}(x+1)}}^{\sqrt{\frac{1}{2}(x+1)}} f(x,y)\,dydx + \int_{-\frac{1}{5}}^{1} \int_{-\sqrt{\frac{1}{3}(1-x)}}^{\sqrt{\frac{1}{3}(1-x)}} f(x,y)\,dydx.$$

Oppgave 2.

a) Se figur 6.



FIGUR 6. Området R begrenset av S_1 og S_2 i oppgave 2.

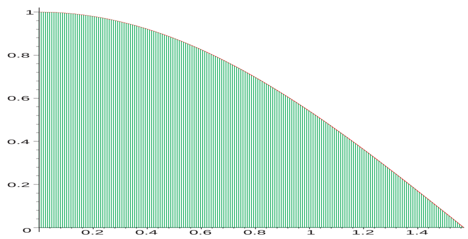
b) Volumet V_R til et område R er typisk gitt av integralet $V_R = \iiint\limits_R dV$. Dersom z er gitt eksplisitt som en funksjon $z = z(x, y)$ av x og y reduserer dette seg til $V_R = \iint\limits_{R'} z(x, y)dA$, der R' er projeksjonen (eller "skyggen") av R ned i xy-planet. Her er $z = \cos x$ og R' begrenset av funksjonen $y = \cos x$ og linjene $y = 0$ og $x = 0$ som vist i figur 7. Dersom vi først integrerer med hensyn på x får vi at $0 \le y \le 1$ og $0 \le x \le \arccos y$. Dette gir integralet

$$V_R = \int_0^1 \int_0^{\arccos y} \cos(x)\, dxdy = \int_0^1 \sin(\arccos(y))\, dy.$$

Dette integralet kan løses med substitusjonen $y = \cos(\theta)$ (Husk at $\arccos(\cos(\theta)) = \theta$). Differensialet er $dy = -\sin(\theta)\, d\theta$. Den nedre integrasjonsgrensen $y = 0$ svarer til $\theta = \frac{\pi}{2}$ og den øvre grensen $y = 1$ svarer til $\theta = 0$. Vi får

$$V_R = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin(\theta)(-\sin(\theta)\, d\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Vi prøver også å bytte integrasjonsrekkefølge. Fra figur 7 ser vi at dette gir integralet



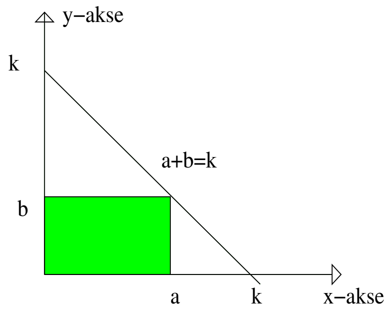
FIGUR 7. Skyggen av R ned i xy-planet.

$$V_R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos(x)} \cos(x)\, dydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \int_0^{\cos(x)} dydx.$$

Det indre integralet er $\int_0^{\cos(x)} dy = \cos(x)$ og vi får

$$V_R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Oppgave 3. La funksjonen $f(a,b) = \iint\limits_R (x+2y)\,dA = \int_0^a \int_0^b (x+2y)\,dydx$. Den skal minimeres med hensyn på betingelsen $g(a,b) = a+b-k = 0$. I figur 8 ser vi integrasjonsområdet. Linjen $a+b=k$ er tegnet inn for å indikere hvor det øverste høyre hjørnet av rektangelet kan være for at kravet $g(a,b)=0$ skal være oppfylt. Vi finner $f(a,b)$ ved å evaluere integralet.



FIGUR 8. Integrasjonsområdet R i oppgave 3.

$$f(a,b) = \int_0^a \int_0^b (x+2y)\,dydx = \int_0^a [xy + y^2]_0^b\,dx$$
$$= \int_0^a (bx + b^2)\,dk = [\frac{1}{2}bx^2 + b^2x]_0^a = \frac{1}{2}ba^2 + b^2a.$$

Vi skal bruke Lagrangemetoden med en bibetingelse.

$$\nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b), \quad g(a,b) = 0.$$

Fra dette får vi følgende system av ligninger

$$ba + b^2 = \lambda, \quad \frac{1}{2}a^2 + 2ab = \lambda, \quad \text{og} \quad a+b=k.$$

Vi får $ba + b^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2ab$. Litt manipulasjon gir

$$b^2 - ab - \frac{1}{2}a^2 = 0.$$

Vi bruker nå kravet $g(a,b)=0$ og setter $a = k-b$ inn i ligningen over. Dette gir en andregradsligning

$$b^2 - (k-b)b - \frac{1}{2}(k-b)^2 = b^2 - k^2\frac{1}{3} = 0$$

med løsning $b = \pm k\frac{\sqrt{3}}{3}$. Nå hadde vi et krav om at $b > 0$ og vi sitter igjen med den positive løsningen. Vi får altså at $a = k(1-\frac{\sqrt{3}}{3})$ og $b = k\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Den maksimale verdien er

$$f(k(1-\frac{\sqrt{3}}{3}), k\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{k^3}{3\sqrt{3}}.$$

Oppgave 4. For en enhetsvektor $\mathbf{u}$ er den retningsderiverte i $\mathbf{u}$-retning til funksjonen $g(x,y,z)$ i punktet P_0 gitt ved $D_{\mathbf{u}}g(P_0) = \nabla g(P_0)\cdot\mathbf{u} = |\nabla g(P_0)|\cos(\theta)$, der θ er vinkelen mellom $\nabla g(P_0)$ og $\mathbf{u}$. Den retningsderiverte oppnår sin maksimale verdi $|\nabla g(P_0)|$ når $\mathbf{u}$ og $\nabla g(P_0)$ er parallelle.

a) La nå $P = (-1,1,1)$, $Q = (1,2,3)$ og $R = (-1,-3,-2)$. Fra oppgaveteksten har vi at den maksimale retningsderiverte til $g(x,y,z)$ i punktet P er lik 6 og dermed vet vi at $|\nabla g(P)| = 6$. Videre opplyses det at dette oppnås i retning mot punktet Q. Enhetsvektoren i denne retningen er $\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}$. Vi har

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 1-(-1),\, 2-1,\, 3-1\rangle = \langle 2,1,2\rangle.$$

Dette gir $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$, og vi finner

$$\mathbf{u} = \frac{1}{3}\langle 2,1,2\rangle.$$

Med dette skal vi nå finne den retningsderiverte i P i retning mot punktet R. Vi begynner med å finne enhetsvektoren $\mathbf{v} = \frac{\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PR}|}$. Vi har

$$\overrightarrow{PR} = \langle -1-(-1),\ -3-1,\ -2-1\rangle = \langle 0,-4,-3\rangle.$$

Dette gir $|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{0^2+(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$, og vi finner

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{5}\langle 0,4,3\rangle.$$

Til slutt får vi

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}g(P) &= \nabla g(P)\cdot\mathbf{v} = 6\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \\ &= -\frac{2}{3}(0+4+6) = -4. \end{aligned}$$

b) Tangentplanet til $f(x,y)$ i punktet $P = (1,-1)$ er gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y+1) = z - f(P).$$

Den retningsderiverte er gitt ved $D_{\mathbf{j}}f(P) = \nabla f(P)\cdot\mathbf{j} = \frac{\partial f}{\partial y}(P)$. I ligningen for tangentplanet til $z = f(x,y)$ i punktet $(1,-1,\frac{3}{2})$ er koeffisienten foran y lik 0. Følgelig er $\frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$ og vi får $D_{\mathbf{j}}f(P) = 0$.
Vi skriver om ligningen for det gitte tangentplanet på normalform. Dette gir

$$-2x + 0y = z - \frac{7}{2}$$

Fra normalformen over kan vi nå finne $\nabla f(P) = \langle \frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P)\rangle = \langle -2, 0\rangle$. La $\mathbf{u} = \langle \frac{1}{2}, c\rangle$, der c er en vilkårlig konstant. Vi ser at $D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P)\cdot\mathbf{u} = -2\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot c = -1$ uansett hva c er. For at $\mathbf{u}$ skal være en enhetsvektor bestemmes c slik at $|\mathbf{u}|^2 = (\frac{1}{2})^2 + c^2 = 1$. Dette gir $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. De ønskede enhetsvektorene blir $\mathbf{u} = \langle \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\rangle$.

Oppgave 5.

a) Vi definerer $g(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4\sqrt{2}(x+y)$ og bruker Lagrangemetoden å finne maksimums- og minimumspunktene til $f(x,y) = xy$ med bibetingelse $g(x,y) = 0$. Vi får

$$\nabla f(x,y) = \lambda\nabla g(x,y), \quad g(x,y) = 0.$$

Dette gir følgende system av ligninger

$$\begin{aligned} &I & y &= \lambda(10x - 6y - 4\sqrt{2}) \\ &II & x &= \lambda(10y - 6x - 4\sqrt{2}) \\ &III & 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4\sqrt{2}(x+y) &= 0 \end{aligned}$$

For å fjerne konstantleddene subtraherer vi ligning II fra ligning I:

$$\begin{aligned} y - x &= \lambda(10x - 6y - 4\sqrt{2}) - \lambda(10y - 6x - 4\sqrt{2}) \\ &= 16\lambda x - 16\lambda y = -16\lambda(y-x). \end{aligned}$$

Nå står termen $y - x$ på begge sider av ligningen, så vi flytter over. Dette gir

$$(1 + 16\lambda)(y - x) = 0.$$

Dette gir oss to tilfeller: 1. $1 + 16\lambda = 0$ eller 2. $y = x$.

1. $1 + 16\lambda = 0$ det vil si $\lambda = -\frac{1}{16}$. Dette setter vi for eksempel inn i ligning II og får $x = -\frac{1}{16}(10y - 6x - 4\sqrt{2})$. Dette gir

$$x + y = \frac{2}{5}\sqrt{2}.$$

Det ville gitt den samme ligningen om vi satte $\lambda = -\frac{1}{16}$ inn i ligning I. Den siste ligningen gir $y = \frac{2}{5}\sqrt{2} - x$. Altså

$$y^2 = x^2 - 2 \cdot \frac{2}{5}\sqrt{2}x + \frac{4}{25} \cdot 2 = x^2 - \frac{4}{5}\sqrt{2}x + \frac{8}{25}$$
$$4\sqrt{2}(x+y) = 4\sqrt{2}(\frac{2}{5}\sqrt{2}) = \frac{16}{5}.$$

Innsatt i ligning III fås

$$\begin{aligned} 0 &= 5x^2 - 6(\frac{2}{5}\sqrt{2}x - x^2) + 5(x^2 - \frac{4}{5}\sqrt{2}x + \frac{8}{25}) - \frac{16}{5} \\ &= 16x^2 - \frac{32}{5}\sqrt{2}x - \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

Løser andregradsligningen og får

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{eller} \quad x = \frac{-\sqrt{2}}{10}.$$

Innsatt i uttrykket for y gir dette to punkter $P_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{10})$ og $P_2 = (\frac{-\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

2. Vi setter $x = y$ inn i ligning III

$$0 = 5x^2 - 6x^2 + 5x^2 - 4\sqrt{2} \cdot 2x = 4x(x - 2\sqrt{2}).$$

Her er $x = 0$ eller $x = 2\sqrt{2}$ med tilhørende punkter $P_3 = (0,0)$ og $P_4 = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

Til slutt må vi sjekke hvilke av de fire punktene vi har funnet som gir maksimum og minimum.

$f(P_1) = f(P_2) = -\frac{1}{10}$ og gir minimum.

$f(P_3) = 0$ er hverken maksimums eller minimumspunkt.

$f(P_4) = 8$ gir maksimum.

Den observante leser kunne ha lagt merke til at $g(x,y) = 0$ definerer en ellipse som er dreiet i forhold til x og y-aksen på en slik måte at den lange halvaksen ligger på linjen $x = y$. Denne dreininger gir kryssleddet $(-6xy)$ i $g(x,y)$. Videre er ikke sentrum i origo, men forskjøvet slik at ytterpunktene på de store halvaksene ligger i henholdsvis $(0,0)$ og $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$. Denne forskyvningen gir førstegradsleddet $-4\sqrt{2}(x+y)$ i $g(x,y)$. For å være mer presis: vi innfører nye koordinater u og v slik at $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-v)$ og $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)$. Dette representerer et koordinatsystem som er dreiet $\frac{\pi}{4}$ radianer mot klokken i forhold til xy koordinatene. Nå er $(*)$ ekvivalent med $(u-2)^2 + 4v = 4$ og funksjonen $z = f(x,y)$ er $z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$.

b) Her kan vi sette oss ned og regne i vei, men med et lite øyeblikks ettertanke ser vi at funksjonen $F(x,y,z) = f(x,y)e^z$, der $f(x,y) = xy$ er funksjonen fra punkt a. Videre vet vi at faktoren e^z er positiv og stigende. Denne faktoren vil derfor bare forsterke eventuelle ekstremalpunkter, og vi får makspunkt $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 12)$ med maksimalverdi $F(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 12) = 8e^{12}$. Minimalpunktene er $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{10}, 12)$ og $(\frac{-\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 12)$ med minimalverdi $F(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{10}, 12) = F(\frac{-\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 12) = -\frac{e^{12}}{10}$.

Oppgave 6. Først regner vi ut størrelser det vil bli bruk for underveis i oppgaven.

$$\nabla F(x,y,z) = \langle yz, xz, xy \rangle \quad \text{og} \quad \nabla G(x,y,z) = k\langle \frac{yz^2}{2\sqrt{xy}}, \frac{xz^2}{2\sqrt{xy}}, 2\sqrt{xy}z \rangle$$

Vi vil også trenge kryssproduktet $\nabla F(x,y,z) \times \nabla G(x,y,z)$. Det er gitt ved

$$\nabla F(x,y,z) \times \nabla G(x,y,z) = k \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ yz & xz & xy \\ \frac{yz^2}{2\sqrt{xy}} & \frac{xz^2}{2\sqrt{xy}} & 2\sqrt{xy}z \end{vmatrix}$$

Vi ekspanderer dette uttrykket og får

$$\begin{aligned}\nabla F(x,y,z)\times\nabla G(x,y,z) &= k\mathbf{i}(2\sqrt{xy}xz^2-\frac{x^2yz^2}{2\sqrt{xy}})+k\mathbf{j}(\frac{xy^2z^2}{2\sqrt{xy}}-2\sqrt{xy}yz^2)+k\mathbf{k}(\frac{xyz^3}{2\sqrt{xy}}-\frac{xyz^3}{2\sqrt{xy}})\\ &= k\mathbf{i}\frac{4x^2yz^2-x^2yz^2}{2\sqrt{xy}}+k\mathbf{j}\frac{xy^2z^2-4xy^2z^2}{2\sqrt{xy}}\\ &= \frac{3}{2}k\sqrt{xy}z^2(x\mathbf{i}-y\mathbf{j})=\frac{3}{2}G(x,y,z)\langle x,-y,0\rangle\end{aligned}$$

Når $G(x,y,z)$ er konstant gir dette tangentvektorer til hyperbler gitt av $xy=\gamma$, der γ er en konstant. Dette kommer til nytte i punkt b.

a) Vi ønsker at $\mathbf{v}$ skal gi $D_{\mathbf{v}}F(P_0)=0$ og $D_{\mathbf{v}}G(P_0)=0$. Altså

$$\begin{aligned}0=D_{\mathbf{v}}F(P_0)=\nabla F(P_0)\cdot\mathbf{v}\quad\text{dvs.}\quad\mathbf{v}\perp\nabla F(P_0)\\ 0=D_{\mathbf{v}}G(P_0)=\nabla G(P_0)\cdot\mathbf{v}\quad\text{dvs.}\quad\mathbf{v}\perp\nabla G(P_0)\end{aligned}$$

En slik vektor finner vi som kryssproduktet $\nabla F(x,y,z)\times\nabla G(x,y,z)$ som vi fant i innledning til denne oppgaven. Det vil si at $\mathbf{v}$ er en vektor med lengde 1 som er parallell med $\nabla F(P_0)\times\nabla G(P_0)=57{,}6k\langle 9,-16,0\rangle$. Dette gir $\mathbf{v}=\pm\frac{1}{\sqrt{337}}\langle 9,-16,0\rangle$.

b) I uttrykket for $\nabla F(x,y,z)\times\nabla G(x,y,z)$ ser vi at koeffisienten foran $\mathbf{k}$ er 0. Det betyr at vi ikke kan endre z dersom vi ønsker å holde verdien av $F(x,y,z)$ og $G(x,y,z)$ konstant lik verdien i P_0 når vi beveger oss bort fra P_0. Nå krever vi at $F(x,y,z)=xyz=F(P_0)$, men siden z ikke kan endre seg må produktet xy holdes konstant lik verdien i P_0, det vil si $xy=9\cdot16=144$. Merk at vi ville fått tilsvarende resultat om vi hadde gjort samme resonnement for $G(x,y,z)=k\sqrt{xy}z^2$ ettersom vi også her måtte kreve at z måtte holdes fiksert og at $\sqrt{xy}$ dermed må være konstant.

Vi har altså at $P_1=(x,\ y,\ 3{,}2)$ og $|\overrightarrow{P_0P_1}|^2=25$ som er ekvivalent med

$$(x-9)^2+(y-16)^2=5^2. \tag{$*$}$$

Her kunne vi nå brukt $xy=144$ og satt inn i ligningen over. Det ville gitt oss en fjerdegradsligning i x. En slik ligning er på ingen måte uløselig, men vi ser først at $x=12$ og $y=12$ gir en løsning fordi kravet $xy=144$ da er oppfylt. Altså er $P_1=(12,\ 12,\ 3{,}2)$ en løsning. De andre heltallsløsningene av $(*)$ tilfredstiler ikke $xy=144$.

Som nevnt kunne vi brukt $xy=144$ og satt dette inn i $(*)$. Dette gir, med $y=\frac{144}{x}$

$$\begin{aligned}(x-9)^2+(y-16)^2&=5^2\\ (x-9)^2+(\frac{144}{x}-16)^2&=5^2\\ x^2-18x+81+\frac{144^2}{x^2}-2\frac{144\cdot16}{x}+16^2&=25\end{aligned}$$

vi multipliserer med x^2 og får

$$x^4-18x^3+312x^2-4608x+20736=0. \tag{$**$}$$

Fra over har vi at $x=12$ er en løsning av $(**)$. Vi kan dermed dividere polynomet i $(**)$ med $x-12$ og få et tredjegradspolynom. Dette kan gjøres for hånd, men det går raskere med Maple. Svaret blir

$$x^3-6x^2+240x-1728=0$$

I følge Maple har denne ligningen bare en reell rot. Den er gitt ved $x\approx6,99699$. Dette gir $y\approx20,58028$. Vi konkluderer med at punktet (6,99699, 20,58028, 3,2) også gir en løsning.