SIF5005 – Matematikk 2 – 2003

Mapleøving 2

Det er mer stoff her enn dere kan forventes å komme gjennom på et par timer. Prøv å bruke litt tid på hver oppgave, og ta én av dem lengre og dypere. Prøv det gjerne ut på andre eksempler som interesserer deg.

Oppgave 1. Bruk Maple til å tegne funksjonen fra oppgave 8 i hjemmeøving 2:

$$f(x, y) = e^{-x^2}(y^2 + 1).$$

NB! Du må bruke `exp` for eksponensialfunksjonen i Maple!

Tegn grafen til $f(x, y) = x^3 - xy^2 + y^3$ i en passe omegn om origo. Regn ut de partiellderiverte $D_1 f$ og $D_2 f$ og tegn dem i samme graf som f selv. (Litt avhengig av hvilket område du har valgt, kan du bli nødt til å gange noen av funksjonene med en konstant for å få dem alle omtrent like store.) Klarer du å se hvilken som er hvilken av disse grafene?

Tegn heller konturplott og gradientplott for samme funksjon f. Se `plots[contourplot]` og `plots[gradplot]`. Forsøk deg frem med opsjonen `filled=true` i konturplott. Kombiner de to plottene i én tegning. Gradienten gir en mye mer umiddelbar geometrisk forståelse enn de to partiellderiverte hver for seg!

Oppgave 2. Gjør (deler av) oppgave 6 fra hjemmeøving 3 med Maple:

$$f(x, y) = -x^3 + x^2 + 3x - x^2 y + \frac{1}{2}y^2.$$

Finn kritiske punkter med tilhørende verdier, tegn konturplott, klassifiser de kritiske punktene.

Maplefunksjonen `extrema` kan være nyttig.

`extrema(f(x,y), {}, {x,y}, 'p');` returnerer største og minste funksjonsverdi blant de kritiske punktene for f. Variabelen `p` vil inneholde x- og y-verdier for de kritiske punktene. (Det andre argumentet, `{}` her, er for bibetingelser. Legger du til noen ligninger her, vil Maple utføre Lagranges metode.)

Oppgave 3. (Denne oppgaven ble gitt til eksamen i mai 1991.) Finn de og klassifisér de kritiske punktene til

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}.$$

(Det er bare ett. Maple finner to, men det andre har komplekse koordinater, så det er det bare å kaste.) Har f noe globalt maksimum? Virker resultatet rart? I strid med intuisjonen? Kanskje det er på tide å skaffe seg en bedre intuisjon! Tegn kontorplott og/eller grafen til f og prøv å forstå hva som skjer.

En annen funksjon som gir et tilsvarende paradoksalt resultat er

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2 y - x - 1)^2.$$

Undersøk funksjonen.

Oppgave 4. Tegn figur av flaten fra oppgave 6 i hjemmeøving 2. Den var gitt i kulekoordinater ved $\rho = 1 - \cos\varphi$.

Maple regner kulekoordinater som talltripler (ρ, θ, φ). Du kan plotte med dem på parameterform eller som en skalar – og i det siste tilfellet regner den ρ som en funksjon av θ og φ – ved `plot3d(...,coords=spherical);`.

Tegn figur av flatene i oppgave 4 i hjemmeøving 2. $S_1\colon x = y^2 + z^2$ og $S_2\colon y = x^2 + z^2$. Maple regner sylinderkoordinater som talltripler (r, θ, z). Du kan plotte med dem på parameterform eller som en skalar – og i det siste tilfellet regner den r som en funksjon av θ og z – ved `plot3d(...,coords=cylindrical);`.

Flaten $z = x^2 + y^2$ kan skrives i sylinderkoordinater som $z = r^2$, som egner seg til parametrisk plotting med $(r, \theta, z) = (r, \theta, r^2)$ der du altså bruker r og θ som parametre.

Hvis du lagrer den tegningen i en variabel, kan du enkelt få flatene S_1 og S_2 ved hjelp av `plottools[transform]`.

`plottools[transform]((x,y,z)->[x,z,y])(figur)` vil for eksempel produsere tegningen `figur` med y- og z-koordinatene byttet om.

Dette er forresten et eksempel på noe man i matematikken kaller en *høyere ordens funksjon*: Når funksjonen T anvendt på en verdi w selv blir en funksjon $T(w)$, som så kan anvendes på en verdi p og gi et resultat som vi skriver $T(w)(p)$. I eksemplet blir det kanskje ikke mindre abstrakt fordi w også er en funksjon (nemlig $(x, y, z) \to (x, z, y)$).

`plottools[transform]` kan også brukes til ikkelineære transformasjoner av grafer, men det fører kanskje litt langt å se på det her.