Stokes' teorem i et nøtteskall

Harald Hanche-Olsen

3. april 2003

Sammendrag

Dette notatet er med hensikt kort og konsist, og hopper over en god del detaljer. Meningen er å gi en kjapp utledning av Stokes' teorem, og målet er bare å gi hovedidéen i beviset.

Innledende manøver: En delvis integrasjon ved hjelp av Greens teorem

La D være et område i uv–planet med randkurve J. Greens teorem

$$\iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\Big)\, du\, dv = \oint_J P\, du + Q\, dv$$

med

$$P = f\frac{\partial g}{\partial u}, \quad Q = f\frac{\partial g}{\partial v}$$

leder til

$$\iint_D \Big(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\Big)\, du\, dv = \oint_J f\, dg \tag{1}$$

hvor høyresiden kan betraktes som en kort form for

$$\oint_J f\frac{\partial g}{\partial u}\, du + f\frac{\partial g}{\partial v}\, dv.$$

Bevis for Stokes' teorem for en parametrisert flate

Vi antar S er parametrisert ved $\mathbf{r}(u,v)$ hvor (u,v) varierer over et område D i uv–planet. Vi finner

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \iint_D \operatorname{curl}\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\cdot\Big(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\Big)\,du\,dv \\
&= \iint_D \Big(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}-\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\Big)\,du\,dv \\
&= \oint_J \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\
&= \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}
\end{aligned}$$

Den første likheten er bare definisjonen av flateintegralet for et vektorfelt. Den andre likheten bruker en identitet som vises på neste side, den tredje likheten er vektorutgaven av (1).

Den siste likheten er kanskje litt dypere enn den ser ut: i hovedsak flytter den integralet fra en kurve i uv–planet til en kurve i rommet. Integralet i den nest siste linjen skal egentlig tolkes som integralet

$$\oint_J P\big((\mathbf{r}(u,v))\big)\,dx+\oint_J Q\big((\mathbf{r}(u,v))\big)\,dy+\oint_J R\big((\mathbf{r}(u,v))\big)\,dz$$

hvor jeg har skrevet $\mathbf{F}=\langle P,Q,R\rangle$ og $\mathbf{r}=\langle x,y,z\rangle$, og vi husker at x, y og z er funksjoner av (u,v). Dersom J parametriseres ved funksjoner $u(t)$ og $v(t)$ så er C parametrisert ved $\mathbf{r}\big(u(t),v(t)\big)$), og den siste likheten over følger.

Det gjenstår å kontrollere sammenhengen mellom fortegnet på normalvektoren $\mathbf{n}$ og omløpsretningen på randkurvene C og J, men jeg skal ikke gjøre det her.

På neste side viser jeg identiteten som ble brukt i overgangen fra første til annen linje over.

Bevis for identiteten

$$(\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\Big(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\Big)=\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}-\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}.$$

Anta først at $\mathbf{F}$ har den enkle formen $\mathbf{F}=\langle P,0,0\rangle$: På den ene side er da

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\Big(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\Big)\\
&\qquad=\Big\langle 0,\frac{\partial P}{\partial z},-\frac{\partial P}{\partial y}\Big\rangle\cdot\Big\langle\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\Big\rangle\\
&\qquad=\underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}_{A}-\underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}}_{B}-\underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}}_{C}+\underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}_{D}
\end{aligned}$$

og på den annen side er

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial u}&=\Big\langle\frac{\partial P}{\partial u},0,0\Big\rangle=\Big\langle\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},0,0\Big\rangle,\\
\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial v}&=\Big\langle\frac{\partial P}{\partial v},0,0\Big\rangle=\Big\langle\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v},0,0\Big\rangle
\end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}-\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\\
&\qquad=\Big(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}}_{D'}+\underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}}_{A'}\Big)\frac{\partial x}{\partial v}-\Big(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}}_{C'}+\underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}}_{B'}\Big)\frac{\partial x}{\partial u}
\end{aligned}$$

Det er nå bare å sjekke at underuttrykkene A–D passer sammen med A'–D' (pass på faktoren utenfor parentesen for de sistnevnte), og at de to gjenværende termene kansellerer.

Dette er faktisk tilstrekkelig. For om vi gjør det sykliske variabelskiftet $x\curvearrowright y\curvearrowright z\curvearrowright x$ og bytter funksjonsnavn $P\curvearrowright Q$, blir beviset over et bevis for tilfellet der $\mathbf{F}=\langle 0,Q,0\rangle$. Og ved å gjøre det samme enda en gang får vi et bevis for tilfellet der $\mathbf{F}=\langle 0,0,R\rangle$. Til slutt er det bare å addere de tre tilfellene, siden vi alltid kan skrive

$$\langle P,Q,R\rangle=\langle P,0,0\rangle+\langle 0,Q,0\rangle+\langle 0,0,R\rangle.$$