75032 Matrisemetoder

Løsningsforslag til oppgaver gitt til mandag 19/9–94

Vi minner om følgende *konvensjon*: Der vi har latt være å fylle ut et matrise-element, står det i virkeligheten 0.

Oppgave 1.5.5 side 39: A reduseres til øvre triangulær form i én rekkeoperasjon (addere -3 ganger første rekke til den tredje), så

$$EA = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ & 5 & 7 \\ & & -1 \end{bmatrix} = U \qquad \text{der } E = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -3 & & 1 \end{bmatrix}$$

og vi har altså $A = LU$ der

$$L = E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 3 & & 1 \end{bmatrix}$$

Systemet $Ax = b$ er ekvivalent med $Ux = c$ der $c = L^{-1}b = Eb = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, med andre ord

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ & 5 & 7 \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(som for øvrig har løsningen $u = 1$, $v = -1$, $w = 1$ som man raskt ser ved framover-substitusjon — og som man kan kontrollere også løser det opprinnelige systemet).

Oppgave 1.5.6 side 40: Merk at E er en elementær matrise. Elementære matriser har ekstra enkle regneregler — for eksempel gjelder

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ a+b & 1 \end{bmatrix}$$

så det er klart at

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow E^n = \begin{bmatrix} 1 & \\ 6n & 1 \end{bmatrix}.$$

Sett inn $n = 2$, 8 og -1.

Oppgave 1.5.11 side 40: For å løse $LUx = b$ løser vi først $Ls = b$ for s og deretter $Ux = s$ for x. I dette tilfellet er

$$Ls = b \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

som vi løser ved framoversubstitusjon: Første ligning gir $p = 2$, som insatt i andre ligning $p+q = 0$ gir $q = -2$, og begge innsatt i siste ligning $p + r = 2$ gir $r = 0$. Dermed er

$$Ux = s \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som vi løser ved tilbakesubstitusjon: Siste ligning gir $w = 0$ som innsatt i annen ligning $v+2w = -2$ gir $v = -2$ og disse innsatt i første ligning $2u + 4v + 4w = 2$ gir $u = 5$.

Oppgave 1.5.12 side 41: En dekomposisjon av typen $A = UL$ kan vi lage ved å gjøre Gausseliminasjon fra nederst i høyre hjørne i stedet for fra øverst til venstre. I første runde, om $a_{nn} \neq 0$, adderer vi passende multipler av siste rekke til de over for å eliminere a_{in} for $i = 1, \ldots, n-1$. Deretter, om $a'_{n-1,n-1} \neq 0$ adderer vi passende multipler av nest siste rekke til de over, og så videre. Om dette går bra ender vi med en nedre triangulær matrise L. Alle rekkeoperasjonene svarer til elementære matriser som er øvre triangulære, og disse kombineres til en øvre triangulær matrise U slik at $A = UL$.

Jeg kan ikke se noen grunn til at matrisene U og L i de to dekomposisjonene $A = LU$ og $A = UL$ skal være like. Som så ofte når man søker moteksempler i matrisealgebra, er det ikke nødvendig å gå lengre enn til 2×2-matriser. Ta for eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

(valgt slik fordi det er den mest generelle 2×2-matrisen jeg kan tenke på hvor både forlengs og baklengs Gausseliminasjon er veldig enkel å utføre generelt): "Normal" Gauss-eliminasjon gir

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ -b & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ & 1 - ab \end{bmatrix}, \qquad A = LU = \begin{bmatrix} 1 & \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ & 1 - ab \end{bmatrix}$$

mens "baklengs" Gauss-eliminasjon leder til

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 - ab & \\ b & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = UL = \begin{bmatrix} 1 & a \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - ab & \\ b & 1 \end{bmatrix}.$$

Faktorene er åpenbart ikke de samme i det generelle tilfellet.

Oppgave 1.27 side 62:

(1) Multipliser $L_1U_1 = L_2U_2$ fra venstre med L_2^{-1} og få $L_2^{-1}L_1U_1 = U_2$. Multipliser deretter fra høyre med U_1^{-1} og få $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$.

Nå er det slik at produkter og inverser av øvre triangulære matriser uten nuller på diagonalen gir nye matriser med samme egenskap, og tilsvarende gjelder for nedre triangulære matriser. Om matrisene i tillegg bare har enere på diagonalen gjelder dette også for produktene og de inverse.

Ligningen $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$ er dermed en likhet mellem en nedre og en øvre triangulær matrise, som derfor må være diagonale. Dessuten har vi enere på diagonalen på venstresiden, så begge sider er identitetsmatrisen, altså $L_2^{-1}L_1 = I = U_2U_1^{-1}$. Av dette utledes så $L_1 = L_2$ og $U_1 = U_2$.

(2) Om $A^2 + A = I$ er $(A + I)A = A^2 + A = I$ og $A(A + I) = A^2 + A = I$, så $A + I$ er en invers for A.

(3)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

er et moteksempel. Bytter vi om rekkene får vi I, som ikke er singulær.