75032 Matrisemetoder

Løsningsforslag til oppgaver gitt til mandag 3/10–94

Jeg burde kanskje bemerke at disse løsningsforslagene er litt knappere enn vi forventer at en eksamensbesvarelse skal være, siden mange mellomregninger er utelatt.

Oppgave 2.3.1 side 87: Oppgaven ber oss om å løse to ligninger med samme koeffisientmatrise. Da er det kanskje greit å ta utganspunkt i matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

der de første fire søylene (v_1, v_2, v_3, v_4) er koeffisientmatrisen mens de to siste er høyresidene i de to ligningssystemene. Gausseliminasjon (tre rekkeoperasjoner) på denne matrisen leder raskt til

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ligningssystemet $c_1v_1 + \cdots + c_4v_4 = 0$ svarer til de første fem søylene i denne matrisen, som åpenbart gir en ikketriviell løsning siden c_4 er en fri variabel: Velger vi for eksempel $c_4 = 1$ får vi ved tilbakesubstitusjon $c_3 = -c_4 = -1$, $c_2 = c_4 = 1$, og $c_1 = -c_2 = -1$. Altså er de fire vektorene v_i ikke lineært uavhengige.

Ligningssystemet $c_1v_1 + \cdots + c_4v_4 = [0, 0, 0, 1]^{\mathrm{T}}$ svarer derimot til de første fire og den siste søylen i matrisen, og den siste linjen her er ligningen $0 = 1$, som ikke har noen løsning — så vektorene utspenner ikke hele $\mathbf{R}^4$.

Oppgave 2.3.4 side 87: Setter vi inn for w_i i ligningen $c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3 = 0$ får vi

$$0 = c_1(v_1 + v_2) + c_2(v_1 + v_3) + c_3(v_2 + v_3) = (c_1 + c_2)v_1 + (c_1 + c_3)v_2 + (c_2 + c_3)v_3$$

men siden v_1, v_2, v_3 er lineært uavhengige er det ekvivalent med systemet $c_1 + c_2 = 0$, $c_1 + c_3 = 0$, $c_2 + c_3 = 0$. Dette løses lett, og har bare den trivielle løsningen $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Altså er vektorene w_1, w_2, w_3 lineært uavhengige.

Oppgave 2.3.18 side 88: (a) Feil. Om A har lineært uavhengige søyler har $Ax = b$ aldri *mer* enn en løsning, men den kan godt være *uten* løsninger. (b) En 5×7 matrise har 7 søyler, som tilhører $\mathbf{R}^5$. Disse kan ikke være lineært uavhengige. (Om matrisen reduseres til trappeform blir det ikke mer enn 5 pivot-elementer, så det er minst 2 fri variabler i ligningen $Ax = 0$.)

Oppgave 2.3.22 side 89: Utsettes til neste uke…

Oppgave 1.6.5 side 49: Om A^2 har invers B, er $A(AB) = A^2B = I$, så AB er en høyreinvers for A. Samtidig er $(BA)A = BA^2 = I$, så BA er en venstreinvers for A. Men når en kvadratisk matrise har både en venstreinvers og en høyreinvers, er de to like, så $AB = BA$ er en invers for A.

Oppgave 1.6.14 side 50: Bruk regneregelen $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ med $B = A^{\mathrm{T}}$, og husk at da er $B^{\mathrm{T}} = A$. Dette viser at AA^{T} er sin egen transponerte, altså er den symmetrisk. Tilsvarende er $A^{\mathrm{T}}A$ symmetrisk (bytt om A og B i resonnementet over).

Ekstra: Oppgaven gikk ut på å vise at den inverse til en permutasjonsmatrise er matrisens transponerte.

Husk at en permutasjonsmatrise har nøyaktig en ener i hver søyle og en ener i hver rekke, mens resten av matriseelementene er null. Spesielt har to forskjellige søyler sine enere på forskjellig plass (ellers vil en rekke ha to enere), så de er ortogonale (det vil si $v_i^{\mathrm{T}}v_j = 0$, når $i \neq j$ og v_i er søyle i i permutasjonsmatrisen P). Men (i, j)-elementet i $P^{\mathrm{T}}P$ er nettopp $v_i^{\mathrm{T}}v_j$, som altså er 0 for $i \neq j$ og 1 for $i = j$. Dette viser at $P^{\mathrm{T}}P = I$ og P^{T} er en venstreinvers for P. Men P^{T} er også en permutasjonsmatrise, så samme argument viser at $PP^{\mathrm{T}} = I$.