75032 Matrisemetoder

Løsningsforslag til oppgaver gitt til mandag 10/10–94

Oppgave 2.3.22 side 89: (utsatt fra forrige uke). (1) Sant, ved 2L side 86. (2) Feil. En basis for V behøver ikke en gang ha noen vektorer i W. For eksempel, la $V = \mathbf{R}^7$ med standard basis $((1,0,0,0,0,0,0), (0,1,0,0,0,0,0), \text{etc.})$ og la W være det fire-dimensjonale underrommet gitt ved ligningene $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$, $x_5 + x_6 = 0$. Ingen av de gitte basisvektorene ligger i W, så ingen delmengde av dem kan danne en basis for W.

Oppgave 2.4.13 side 100: Begge matrisene har rang 1, og

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 2.4.15 side 100: En venstreinvers B til A oppfyller $BAx = x$ for alle x, slik at nullrommet til A må være trivielt. Dette er ikke tilfellet for A (siden den er 2×3 er rangen høyst to, så nullrommet har dimensjon ≥ 1 — man ser også lett at $[1, -1, 1]^{\mathrm{T}}$ ligger i nullrommet), så A har ingen venstreinvers.

Tilsvarende vil en høyreinvers B oppfylle $ABx = x$ for alle x, slik at $y = Bx$ løser ligningen $Ay = x$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Her er A allerede på trappeform, og en fri variabel er y_3. Setter vi bare $y_3 = 0$, ender vi med $y_2 = x_2$ og $y_1 = x_1 - x_2$, dvs

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

og matrisen her blir da en høyreinvers for A. Men dette svaret er ikke entydig: Jeg kunne like godt valgt $y_3 = x_2$ eller en hvilken som helst annen lineærkombinasjon av x_1 og x_2, som ville ledet til en annen høyreinvers.

Siden $M = A^{\mathrm{T}}$ vil ikke M ha noen høyreinvers, fordi dens transponerte da ville vært en venstreinvers for A. Men en venstreinvers for M vil være den transponerte av A's høyreinvers, som vi fant ovenfor.

Matrisen T har en høyreinvers hvis og bare hvis den har en venstreinvers, siden den er kvadratisk. T er også på trappeform uansett verdiene av a og b, og vi kan lese rett ut at rangen blir 2 dersom $a \neq 0$ og mindre om $a = 0$ (i så fall 1 dersom $b \neq 0$ og 0 om $b = 0$). Dersom $a \neq 0$ kan vi direkte se at

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & -b/a^2 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2.4.17 side 100: Feilen i "beviset" er at $A^{\mathrm{T}}A$ ikke behøver ha noen invers.

Oppgave 2.4.19 side 101: Annen og fjerde søyle i U er basis for $\mathcal{R}(U)$, så annen og fjerde søyle i A er basis for $\mathcal{R}(A)$.

For å finne basis for $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(U)$ bruker vi at $Ux = 0$ har fri variable x_1, x_3 og x_5. Løser vi med hensyn på de andre variablene finner vi $x_4 = -2x_5$ og $x_2 = -(2x_3 + 3x_4 + 4x_5) = -2x_3 + 2x_5$, eller

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

De tre søylene i denne matrisen blir basis for $\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(A)$. De utspenner jo dette rommet, og er lineært uavhengige som man ser ved å betrakte første, tredje og femte rekke.

Rekkerommet $\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})$ til A har de transponerte av de to første rekkene til U som basis. For $\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}}) = \mathcal{R}(U^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}) = \{U^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}x : x \in \mathbf{R}^3\} = \{U^{\mathrm{T}}y : y \in \mathbf{R}^3\} = \mathcal{R}(U^{\mathrm{T}})$, og på grunn av trappeformen til U blir de to første søylene i U^{T} en basis.

Venstre nullrom $\mathcal{N}(A^{\mathrm{T}})$ til A er løsningene av $U^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}x = 0$. Men på grunn av trappeformen til U er det uten videre klart at løsningene til $U^{\mathrm{T}}y = 0$ er gitt ved $y_1 = y_2 = 0$, så bare y_3 er fritt valgbar, og basis for løsningsrommet har bare en vektor. Vi kan velge $y_3 = 1$ for denne vektoren. Løser vi så $L^{\mathrm{T}}x = y$ ved tilbakesubstitusjon ender vi med $x = [1, -1, 1]^{\mathrm{T}}$, og denne vektoren danner dermed en basis for venstre nullrom.

Til slutt bør du for kontrollens skyld sjekke at dimensjonene til de fire underrommene stemmer med lineæralgebraens fundamentalsetning!

Oppgave 2.33 side 131:

(a) Rangen er 3 (antall rekker $\neq 0$ i trappeformen U).

(b) De tre første rekkene i U danner en basis for rekkerommet til A.

(c) Rekke 1, 2 og 3 i A er lineært avhengige (de oppfyller en lineær avhengighet på formen $r_1 + 2r_2 - r_3 = 0$).

(d) Fordi søylerommet til U har U's første, tredje og femte søyle som basis (de har pivotelementene), vil en basis for søylerommet til A bestå av A's første, tredje og femte søyle.

(e) Venstre nullrom til A er et underrom av $\mathbf{R}^4$, og har derfor dimensjon $4 - 3 = 1$ (tretallet er rangen til A).

(f) $Ax = 0$ er ekvivalent med $Ux = 0$. Det systemet har to frie variable, x_2 og x_4. Om vi løser systemet på de øvrige variablene ved tilbakesubstitusjon, finner vi i tur og orden $x_5 = 0$, $x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0 \Longrightarrow x_3 = 3x_4$, og $2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \Longrightarrow x_1 = (x_2 - 4x_3 - 2x_4 - x_5)/2 = (x_2 - 14x_4)/2 = x_2/2 - 7x_4$.