75032 Matrisemetoder

Løsningsforslag til oppgaver gitt til mandag 17/10–94

Gjennomgås mandag 24/10–94

Oppgave 2.18 side 129: Hvis A er en $n \times n$-matrise med rang n, er A invertibel. Om man multipliserer ligningen $A^2 = A$ fra den ene siden med en invers av A, får man $A = I$.

Oppgave 2.20 side 129: Det finnes $5! = 120$ permutasjoner av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ og derfor like mange 5×5-matriser. (For å spesifisere en permutasjon σ må man velge $\sigma(1)$ på en av 5 måter, deretter $\sigma(2)$ på en av 4 måter (siden $\sigma(2) \neq \sigma(1)$), deretter $\sigma(3)$ på en av 3 måter (forskjellig fra $\sigma(2)$ og $\sigma(1)$), $\sigma(4)$ på en av 2 måter, og endelig er det bare ett valg igjen for $\sigma(5)$. I alt $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ måter).

Siden rommet av 5×5-matriser er 25-dimensjonalt, kan ikke alle 120 permutasjonsmatriser være lineært uavhengige, ved plassmangelteoremet.

Permutasjonsmatrisene utspenner ikke hele rommet av 5×5-matriser, fordi de oppfyller mange homogene lineære ligninger, for eksempel

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} - a_{21} - a_{22} - a_{23} - a_{24} - a_{25} = 0.$$

Alle matrisene som oppfyller ligningen over danner et underrom av dimensjon 24, og alle permutasjonsmatrisene ligger i dette underrommet. Det er dermed ikke mulig for noen mengde av permutasjonsmatriser å utspenne hele rommet av 5×5-matriser.

Oppgave 2.30 side 130:

(a) $x \in \mathscr{N}(A) \iff Ax = 0 \implies A^2x = A(Ax) = 0 \iff x \in \mathscr{N}(A^2)$. Med andre ord, nullrommet til A er inneholdt i nullrommet til A^2.

(b) Et element i søylerommet $\mathscr{R}(A^2)$ kan skrives A^2x der x er en vektor. Men $A^2x = A(Ax)$ er på formen Ay for en vektor y, altså med i $\mathscr{R}(A)$.

Oppgave 2.32 side 130:

(a) Kravet $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6$ kan skrives $Ax = 0$ med

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Vi ser at A allerede er på trappeform, og frie variabler er x_2, x_4, x_5 og x_6. Setter vi de etter tur og orden lik 1 mens de andre settes lik 0, ender vi med basisen

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi fant allerede matrisen A med dette rommet som sitt nullrom, ovenfor.

(c) For å finne en matrise med dette rommet som sitt søylerom er det bare å ta basisen ovenfor og lage en matrise der søylene er basisvektorene.

Oppgave 3.1.11 side 142: Om $Ax = b$ og $A^{\mathrm{T}}y = 0$ med $y^{\mathrm{T}}b \neq 0$, merk at den andre ligningen kan skrives $y^{\mathrm{T}}A = 0$. Dermed blir $0 = y^{\mathrm{T}}Ax = y^{\mathrm{T}}b \neq 0$, en motsigelse.

Oppgave 3.1.19 side 143:

(a) Feil. La V være x-aksen og W være y-aksen i $\mathbf{R}^3$, så er de ortogonale, men $V^\perp$ er yz-planet og $W^\perp$ er xz-planet, og de er ikke ortogonale (de inneholder begge z-aksen). Generelt vil implikasjonen holde hvis, og bare hvis, $\dim(V) + \dim(W) = n$ der rommene er inneholdt i $\mathbf{R}^n$.

(b) Nei, nei, nei, *nei*! Et opplagt moteksempel har $Z = V$.