75032 Matrisemetoder

Løsningsforslag til oppgaver gitt til mandag 31/10–94

Oppgave 3.2.1 side 150:
(a) Man finner $a^{\mathrm{T}}b = 2\sqrt{xy}$ og $\|a\|^2 = \|b\|^2 = x + y$, så Schwarz ulikhet blir $2\sqrt{xy} \leq x + y$. Med andre ord, det geometriske middel $\sqrt{xy}$ er mindre enn eller lik det aritmetiske middel $(x + y)/2$. (Samme resultat får man mer direkte ved å betrakte $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \geq 0$ og $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$).

(b) Siden begge sider i trekantulikheten

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

er positive, er den ekvivalent med den kvadrerte ulikheten, som blir

$$\|x\|^2 + 2x^{\mathrm{T}}y + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 .$$

Men etter at vi har trukket fra alle de felles leddene på begge sider og delt med 2 står vi igjen med $x^{\mathrm{T}}y \leq \|x\|\,\|y\|$, som nesten er Schwarz ulikhet, men under enhver omstendighet *følger* fra Schwarz ulikhet $\left|x^{\mathrm{T}}y\right| \leq \|x\|\,\|y\|$.

Oppgave 3.2.3 side 151: Med vektorene i oppgaven finner man $a^{\mathrm{T}}b = 10$, $\|a\| = \sqrt{3}$ og $\|b\| = 6$. Dette gir at multiplet av a nærmest b er

$$\frac{b^{\mathrm{T}}a}{\|a\|^2}a = \frac{10}{3}a$$

mens punktet på linjen gjennom b nærmest til a er

$$\frac{a^{\mathrm{T}}b}{\|b\|^2}b = \frac{10}{36}b.$$

Oppgave 3.2.7 side 151: Med $a = (a_1, \ldots, a_n)$ og $b = (1, \ldots, 1)$ blir Schwarz ulikhet på formen $(a^{\mathrm{T}}b)^2 \leq \|a\|^2\,\|b\|^2$ den søkte ulikhet

$$(a_1 + \cdots + a_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)n.$$

(Dividerer vi med n^2 og tar kvadratrot, får vi ulikheten

$$\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right| \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

som er en kjent ulikhet mellom aritmetisk og kvadratisk middel (eller RMS, Root-Mean-Square).)

Oppgave 3.2.8 side 151: To typiske vektorer fra sentrum til to hjørner i tetraederet er $a = (0, 0, 0) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ og $b = (1, 1, 0) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Dette gir $\|a\|^2 = \|b\|^2 = 3/4$ og $a^{\mathrm{T}}b = -1/4$ slik at cosinus til vinkelen blir $-1/3$ (og vinkelen blir omtrent $109.47122°$).

Oppgave 3.2.11 side 151:
(a)

$$P_1 = (a^{\mathrm{T}}a)^{-1}aa^{\mathrm{T}} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{bmatrix}.$$

En vektor ortogonalt på a er $b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, og en tilsvarende beregning gir da

$$P_2 = (b^{\mathrm{T}} b)^{-1} b b^{\mathrm{T}} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) $P_1 + P_2 = I$ og $P_1 P_2 = 0$. Disse formlene gjelder alltid når P_1 og P_2 er ortogonalprojeksjon på underrom som er hverandres ortogonalkomplement. $P_1 P_2 = 0$ uttrykker ortogonalitet: $P_2 x$ ligger i nullrommet til P_1 som er ortogonalkomplementet til bildet til P_1. Og $P_1 + P_2 = I$ uttrykker det at enhver vektor kan skrives som sum av to vektorer, en fra hver av de to underrommene.

Oppgave 3.2.14 side 152: Snittet av de to planene er en linje, siden de ikke er parallelle. Men en vektor i linjen er $a = (1, -2, 1)$, så den søkte projeksjonen kan beregnes på vanlig vis som

$$P = (a^{\mathrm{T}} a)^{-1} a a^{\mathrm{T}} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$