75032 Matrisemetoder

Løsningsforslag til oppgaver gitt til mandag 7/11–94

Oppgave 3.2.16 side 152:
(a) $x^{\mathrm{T}}(Py) = (Py)^{\mathrm{T}}x = y^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}x = y^{\mathrm{T}}(Px)$ siden $P^{\mathrm{T}} = P$.
(b) Dersom vi skriver $\theta(x, y)$ for vinkelen mellom x og y er

$$\cos\theta(x, Py) = \frac{x^{\mathrm{T}}Py}{\|x\|\,\|Py\|}, \quad \cos\theta(y, Px) = \frac{y^{\mathrm{T}}Px}{\|Px\|\,\|y\|}$$

De to tellerne er like, men vi har ingen grunn til å tro at nevnerne skal være like — for eksempel om x er parallell med a slik at $Px = x$ mens y ikke er det, slik at $\|Py\| < \|y\|$.

For de oppgitte vektorene finner vi $\|a\| = \sqrt{3}$, $\|x\| = \sqrt{5}$, $\|y\| = 3$, $a^{\mathrm{T}}x = a^{\mathrm{T}}y == 1$, som leder til

$$Px = \frac{a^{\mathrm{T}}x}{a^{\mathrm{T}}a}a = \frac{1}{3}a, \quad Py = \frac{a^{\mathrm{T}}y}{a^{\mathrm{T}}a}a = \frac{1}{3}a$$

hvorav

$$\cos\theta(x, Py) = \frac{x^{\mathrm{T}}Py}{\|x\|\,\|Py\|} = \frac{1/3}{\sqrt{5}/\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}}, \quad \cos\theta(y, Px) = \frac{y^{\mathrm{T}}Px}{\|Px\|\,\|y\|} = \frac{1/3}{(1/\sqrt{3})3} = \frac{1}{9\sqrt{3}}.$$

(c) $(Px)^{\mathrm{T}}(Py) = x^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}Py = x^{\mathrm{T}}Py$ siden $P^{\mathrm{T}} = P$ og $P^2 = P$. $\theta(Px, Py) = 0$, siden de to vektorene er parallelle.

Oppgave 3.3.6 side 163: Normalligningene blir

$$A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b, \qquad A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 18 \end{bmatrix}, \quad A^{\mathrm{T}}b = \begin{bmatrix} -9 \\ 27 \end{bmatrix}, \qquad \text{med løsning } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dermed blir

$$p = Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad q = b - p = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{N}(A^{\mathrm{T}}).$$

Oppgave 3.3.24 side 165: Vi søker en tilnærmet sammenheng på formen $y = at + b$, som gir ligningssystem

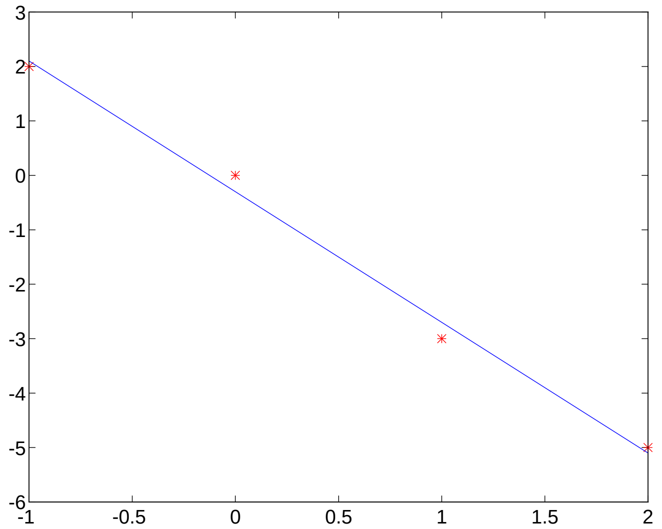
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Normalligningen blir

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \text{med løsning } \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12/5 \\ -3/10 \end{bmatrix}.$$

Her er en kort løsning av oppgaven med MATLAB:

```
>> t=[-1,0,1,2]';
>> y=[2,0,-3,-5]';
>> A=[t,ones(size(t))]

A =

    -1     1
     0     1
     1     1
     2     1

>> c=(A'*A)\A'*y

c =

   -2.4000
   -0.3000

>> plot(t,y,'r*',t,A*c,'b-')
>> print -depsc 'loesn-07.eps'
```



(I MATLAB skrives `A'` for den transponerte til `A`. Semikolon brukes for å undertrykke utskrift av et resultat. Notasjonen `A\b` står for $A^{-1}b$, men i stedet for å regne ut A^{-1} løses ligningen $Ax = b$ — ikke at det gjør noen praktisk forskjell for 2×2-matriser, men for store matriser er det en betydelig forskjell.)