75032 Matrisemetoder

Løsningsforslag til oppgaver gitt til mandag 14/11–94

3.4.5 side 180: At u er en enhetsvektor betyr $u^{\mathrm{T}}u = 1$, og det følger at $P = uu^{\mathrm{T}}$ er en projeksjon: $P^2 = P = P^{\mathrm{T}}$. For $P^2 = (uu^{\mathrm{T}})(uu^{\mathrm{T}}) = u(u^{\mathrm{T}}u)u^{\mathrm{T}} = u1u^{\mathrm{T}} = uu^{\mathrm{T}} = P$, og $P = P^{\mathrm{T}}$ er opplagt. Av dette får vi at Q er symmetrisk: $Q^{\mathrm{T}} = Q$, og $Q^{\mathrm{T}}Q = Q^2 = (I-2P)(I-2P) = I^2 - 2IP - 2PI - (2P)^2 = I - 4P + 4P = I$, som viser at Q er ortogonal. (Q er avbildningen som speiler et punkt gjennom underrommet ortogonalt på u).

$u^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ gir

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ved en heller triviell regning.

3.4.16 side 181: Sett[1]

$$a_2' = a_2 - \frac{a_2^{\mathrm{T}}a_1}{a_1^{\mathrm{T}}a_1}a_1 = a_2 - \frac{9}{9}a_1 = a_2 - a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

så er $\|a_1\| = 3$ og $\|a_2'\| = \sqrt{2}$ så vi normaliserer alt ved å sette $q_1 = a_1/3$ og $q_2 = a_2'/\sqrt{2} = (a_2 - a_1)/\sqrt{2}$. Da er $a_1 = 3q_1$ og $a_2 = a_1 + \sqrt{2}q_2 = 3q_1 + \sqrt{2}q_2$ og dekomposisjonen $A = QR$ blir

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Her er a_1 og a_2 søylene i A, q_1 og q_2 søylene i Q, og første og annen søyle i R gjenspeiler relasjonene $a_1 = 3q_1 + 0q_2$ og $a_2 = 3q_1 + \sqrt{2}q_2$.

3.4.24 side 182: Det neste Legendre-polynomet blir

$$x^3 - \frac{(x^3,1)}{(1,1)}1 - \frac{(x^3,x)}{(x,x)}x - \frac{(x^3, x^2 - \frac{1}{3})}{(x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3})}(x^2 - \frac{1}{3})$$

men nå er det slik at indreproduktet av to potenser av x med tilsammen odde grad blir 0 på grunn av symmetrien:

$$(x^m, x^n) = \int_{-1}^{1} x^{m+n}\,dx = \frac{1-(-1)^{m+n+1}}{m+n+1} = \begin{cases} \frac{2}{m+n+1} & \text{for } m+n \text{ like,} \\ 0 & \text{for } m+n \text{ odde} \end{cases}$$

Dermed er det bare første og tredje ledd som blir noe, og vi ender med

$$x^3 - \frac{(x^3,x)}{(x,x)}x = x^3 - \frac{2/5}{2/3}x = x^3 - \frac{3}{5}x.$$

[1] a_3 burde vært a_2. Trykkfeil i oppgaven?

3.4.27 side 182: Om vi først anvender Gram-Schmidt rett fram etter nesen uten å normalisere, får vi en ortogonal basis

$$a_1' = a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2' = a_2 + \frac{1}{2}a_1' = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3' = a_3 + \frac{2}{3}a_2' = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

og vi finner $\|a_1'\| = \sqrt{2}$, $\|a_2'\| = \sqrt{3/2}$ og $\|a_3'\| = \sqrt{4/3}$, som har et opplagt mønster, spesielt om vi skriver om den første normen til $\|a_1'\| = \sqrt{2/1}$. De normaliserte vektorene finnes lett.

La oss se på hvordan dette kan generaliseres. I $\mathbf{R}^n$ setter vi

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, a_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Det er klart at alle disse tilhører det $(n-1)$-dimensjonale underrommet V gitt ved $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Men vektorene er lineært uavhengige[2], så de danner en basis for V. Tilsvarende vil $a_1, \cdots, a_k$ danne en basis for underrommet $V_k = \{x \in \mathbf{R}^n : \sum_{i=1}^{k+1} x_i = 0 \text{ og } x_i = 0 \text{ for } i > k+1\}$.

Om vi lar $a_1', \ldots$ være resultatet av Gram-Schmidt uten normalisering må da a_k' være ortogonalt på V_{k-1} for alle k, og dens $(k+1)$te komponent må være -1 (siden $a_k' = a_k -$(en lineærkombinasjon av de foregående)). Men alle de k første komponentene til a_k' må være like! Derfor tvinges vil til

$$a_k' = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & \cdots & \frac{1}{k} & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

der det er k forekomster av $\frac{1}{k}$ i starten. Vi ser at

$$\|a_k'\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k^2} + 1 = \frac{1}{k} + 1 = \frac{k+1}{k}$$

og disse resultatetene var generaliseringen jeg ba om.

[2] Hvorfor?