DON'T PANIC

75032 Matrisemetoder

Løsningsforslag til oppgaver gitt til mandag 21/11–94

4.2.1 side 218: Generelt er $\det(cA) = c^n \det(A)$ for en $n \times n$-matrise A, for om vi skriver $\det(v_1, \dots, v_n)$ for determinanten til en matrise med rekker $v_1, \dots, v_n$ er $\det(cv_1, cv_2, \dots, cv_n) = c\det(v_1, cv_2, \dots, cv_n) = \cdots = c^n \det(v_1, v_2, \dots, v_n)$ (siden determinanten er lineær i hver rekke for seg — ta en rekke om gangen, og sett c utenfor).

Spesielt er $\det(2A) = 2^n \det(A)$ og $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$. Til sist (og uten sammenheng med det foran) er $\det(A^2) = \det(A)^2$ ved en likefrem anvendelse av regelen $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

4.2.4 side 219: Begge de to gitte matrisene

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kan omformes til identitetsmatrisen ved rekkeombyttinger. For den første byttes 1. og 4. rekke og deretter 2. og 3. rekke — altså to ombyttinger, og determinanten blir $(-1)^2 \det(I) = 1$. For den andre flyttes siste rekke opp til toppen ved først å bytte de to siste rekkene, deretter nummer 2 og 3 og til sist nummer 1 og 2. I alt 3 ombyttinger, og determinanten blir $(-1)^3 \det(I) = -1$.

4.2.6 side 219:

(a) $\det(A) = 0$ siden A er en 3×3-matrise med rang 1, altså singulær.

(b) $\det(U) = 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

(c) $\det(U^{\mathrm{T}}) = \det(U) = 16$.

(d) $\det(U^{-1}) = \det(U)^{-1} = 1/16$.

(e) $\det(M) = \det(U) = 16$, for $M = PU$ der P er den første av de to matrisene i oppgave 4.2.4. Eller, sagt på en annen måte, M fremkommer av U ved to rekkeombyttinger — de samme som nevnt for den første av matrisene i 4.2.4.

4.2.10 side 220: Ved rekkeoperasjoner, samt litt bruk av multinlinearitet (det faktum at determinanten er lineær i hver rekke) finner vi

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(c-b)
\end{aligned}$$

som ønsket.

4.2.17 side 220: Argumentet bygger på formelen $\det(-A) = -\det(A)$, som bare er riktig for odde n. Men da er argumentet til gjengjeld helt i orden, slik at $CD = -DC$ kun er mulig for matriser av odde orden når minst en av matrisene er singulær.

For $n = 2$ kan man lett finne et eksempel:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad CD = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad DC = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -CD.$$

(multiplikasjon med D fra høyre bytter om de to søylene, mens multiplikasjon med D fra venstre bytter om de to rekkene i C).