75032 Matrisemetoder

Løsningsforslag til oppgaver gitt til mandag 28/11–94

4.3.5 side 228: Utvikler vi den gitte $n \times n$-matrisen etter første rekke får vi

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

der determinantene på høyresiden er $(n-1) \times (n-1)$-determinanter, og den første er D_{n-1} mens den andre har fått en 0 i $(2,1)$-posisjonen men ellers ligner helt på D_{n-1}. Den andre determinanten utvikles igjen etter første rekke, med resultat $D_{n-2} + 0$ siden den siste determinanten har bare nuller i første søyle. Alt i alt har vi da funnet $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$.

4.3.8 side 229: De tre siste rekkene ligger i et todimensjonalt underrom, og kan derfor ikke være lineært uavhengige (plassmangelteoremet). Dermed er determinanten null.

4.3.9 side 229: Vi kan generalisere til å vise

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D)$$

der A og D er kvadratiske matriser (og D er rektangulær slik at dimensjonene passer): Jeg deler det i to.

Dersom $\det(A) = 0$ har A lineært avhengige søyler, og da er de første søylene i matrisen på venstresiden også lineært avhengige, siden de er søylene i A med noen nuller hektet forrest. Dermed blir determinanten på venstre siden også null, og likheten holder.

Dersom $\det(D) \neq 0$ kan vi faktorisere venstresiden som

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

men det er ikke vanskelig å vise

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det(A) \quad \text{og} \quad \det \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det(D)$$

ved å vise at venstresidene oppfyller aksiomene for henholdsvis determinanten til A og determinanten til D.

Det finnes sikkert mange andre bevis, og utallige varianter på dette beviset.

For et eksempel på $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C$, betrakt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

som har determinant -1 (den er en permutasjonsmatrise tilsvarende transposisjonen som bytter 2 og 3), men splitter vi den i 2×2-blokker vil hver blokk ha determinant 0.

4.3.13 side 230: Vi følger hintet i oppgaven, og merker oss at

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & A \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

der den første matrisen er den vi ønsker determinanten til, den andre har determinant 1 (for eksempel fordi den er triangulær med bare enere på diagonalen), og matrisen på høyresiden har determinant $\det A \det B$ ved oppgave 4.3.9.

4.4.2 side 238: Anta for eksempel at matisen A er øvre triangulær. Kofaktoren A_{ij} er $(-1)^{i+j}$ ganger determinanten man får ved å stryke rekke i og søyle j. For eksempel, om A er 4×4 blir

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Mer generelt, om $i < j$ får vi determinanten til en $(n-1) \times (n-1)$-matrise som er øvre triangulær med nuller på diagonalen i posisjon $i, \ldots, j-1$. Denne determinanten blir 0, så $A_{ij} = 0$ for $i < j$, og kofaktormatrisen A_{cof} som jo har (i,j)-element A_{ji} (husk transponeringen her), blir øvre triangulær.