75032 Matrisemetoder

Løsningsforslag til oppgaver gitt til onsdag 8/2–95

1.28 side 62: Vi ser at

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ b & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ c & 1 & 0\\ d & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ a+c & 1 & 0\\ b+d & 0 & 1\end{bmatrix}$$

med andre ord, for matriser av denne spesielle formen (enere på diagonalen, nuller utenfor diagonalen unntatt i første søyle) er matrisemultiplikasjon det samme som å addere elementene utenfor diagonalen. Dette gir uten videre

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ l & 1 & 0\\ m & 0 & 1\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ nl & 1 & 0\\ nm & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ l & 1 & 0\\ m & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -l & 1 & 0\\ -m & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Gausseliminasjon gir uten videre

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ l & 1 & 0\\ 0 & m & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -l & 1 & 0\\ lm & -m & 1\end{bmatrix}.$$

2.13 side 129: I dette tilfellet går Gausseliminasjon uten pivotering helt greit rett fram etter nesen. I de tilfellene der vi får en null på diagonalen får vi nuller også under diagonalen, så vi kan bare regne videre som om ingenting var hendt. Slutten på visa blir

$$A = LU = \begin{bmatrix}1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & a & a & a\\ & b-a & b-a & b-a\\ & & c-b & c-b\\ & & & d-c\end{bmatrix}$$

der jeg, min vane tro, ikke skriver noe i de feltene der det kommer en null. Søylene i A blir som alltid lineært uavhengige akkurat når U ikke har noen nuller på diagonalen (generelt, for trappedekomposisjon, når hver søyle i U har en pivot). Det er åpenbart ekvivalent med at $a \neq 0$, $b \neq a$, $c \neq b$ og $d \neq c$.

2.31 side 130: Med $A = uv^{\mathrm{T}}$ blir $A^2 = uv^{\mathrm{T}}uv^{\mathrm{T}}$ men siden u og v er søylevektorer blir $v^{\mathrm{T}}u$ en 1×1-matrise, som altså kan oppfattes som en skalar. Så $A^2 = (v^{\mathrm{T}}u)uv^{\mathrm{T}} = (v^{\mathrm{T}}u)A$ som er null hvis og bare hvis $v^{\mathrm{T}}u = 0$, det vil si u og v er ortogonale. (Den andre muligheten er at $A = 0$, men da er enten $u = 0$ eller $v = 0$ så det er et spesialtilfelle av den første muligheten).

3.39 side 210: Om søylene i A er ortogonale blir $A^{\mathrm{T}}A$ diagonal (og omvendt). Dette fordi (i,j)-elementet i $A^{\mathrm{T}}A$ er indreproduktet av søylene i og j i A. Av samme grunn, om søylene i A er ortonormale blir $A^{\mathrm{T}}A = I$.

3.40 side 210: $A^{\mathrm{T}}A$ er invertibel hvis og bare hvis den har trivielt nullrom, siden den er kvadratisk. Men $Ax = 0$ impliserer $A^{\mathrm{T}}Ax = 0$, så om $A^{\mathrm{T}}A$ har trivielt nullrom har også A det, og søylene i A er lineært uavhengige. Lineær uavhengighet av søylene i A er altså en nødvendig betingelse for at $A^{\mathrm{T}}A$ skal være invertibel. Denne betingelsen er også tilstrekkelig, for om $A^{\mathrm{T}}Ax = 0$ blir $x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax = 0$, eller med andre ord $\|Ax\|^2 = (Ax)^{\mathrm{T}}Ax = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax = 0$ som gir $Ax = 0$.

4.16 side 242: Rekke nummer i i en kvadratisk matrise A med $a_{ij} = i + j$ kan skrives $u + iv$ der $u = [1, 2, \ldots, n]$ og $v = [1, 1, \ldots, 1]$. Alle rekkene ligger altså i et todimensjonalt rom (utspent av u og v), og kan ikke være lineært uavhengige for $n > 2$. Dermed blir $\det(A) = 0$ for $n > 2$.

For $n = 1$ og $n = 2$ regner vi ut determinanten direkte, og får henholdsvis 2 og -1.

4.25 side 242: Permutasjonsmatrisen til det sirkulære skiftet blir

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinanten blir ± 1 med fortegn lik fortegnet til permutasjonen. En enkel måte å finne det ut på er å omforme matrisen til identitetsmatrisen ved rekkeombyttinger. Vi må bare flytte første rekke ned til slutten, ved suksessivt å bytte den om med rekke nummer $2, 3, \ldots, n$. Det er i alt $n - 1$ rekkeombyttinger, så determinanten blir $(-1)^{n-1}$.