75032 Matrisemetoder

Løsningsforslag til oppgaver gitt til onsdag 22/2–95

DON'T PANIC

5.1.8 side 252: Det karakteristiske polynomet har jo formen $\det(A-\lambda I) = (-1)^n\lambda^n + \cdots$, der $\cdots$ står for termer med lavere potens av λ enn n. Et polynom i λ av grad n med ledende koeffisient 1 kan alltid faktoriseres som $(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$ der $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbf{C}$, og det leder til en faktorisering

$$\det(A-\lambda I) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n) = (\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda) \qquad (*)$$

som antydet i oppgaven. Det *fenomenalt geniale* valg $\lambda = 0$ leder jo da straks til at determinanten er produktet av alle egenverdiene.

5.1.9 side 252: Multipliserer man ut høyresiden i $(*)$ får man straks

$$\det(A-\lambda I) = (-\lambda)^n + (\lambda_1+\cdots+\lambda_n)(-\lambda)^{n-1} + \cdots \qquad (**)$$

mens den eksplisitte formelen for determinanten jo sier at

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

er en sum av $n!$ termer (en for hver permutasjon av $\{1,\ldots,n\}$), som hver et produkt av utvalg av n ledd fra matrisen med eksakt ett ledd i hver rekke og ett i hver rad. Dersom et slikt utplukk velger element j fra rekke i med $j \neq i$, kan det ikke velge element j fra rekke j, så utplukket kan høyst inneholde $n-2$ elementer fra diagonalen, og produktet har dermed grad $\leq n-2$ i λ. Derfor vil produktet av diagonalelementene være det eneste leddet i summen som inneholder potenser av λ høyere enn $n-2$. Dette leder til

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= (a_{11}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) + \cdots \\ &= (-\lambda)^n + (a_{11}+\cdots+a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + \cdots \\ &= (-\lambda)^n + \operatorname{tr}(A)(-\lambda)^{n-1} + \cdots \end{aligned}$$

der $\cdots$ bare inneholder ledd av lavere grad enn $n-1$. Sammenligner vi dette med $(**)$ får vi $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1+\cdots+\lambda_n$.

5.1.10 side 253:

(a) Det finnes selvsagt massevis av eksempler, men jeg tenkte raskt på disse, som er inspirert av Pauli-matrisene i kvantemekanikk:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A+B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

der A har egenverdiene $\pm i$, B har egenverdiene ± 1, AB har egenverdiene ± 1 og $A+B$ har egenverdien 0 (med algebraisk multiplisitet 2, geometrisk multiplisitet 1).

(b) For summen av egenverdiene, husk at $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$. For produktet bruker vi tilsvarende $\det(AB) = \det A \det B$.

5.2.5 side 260: A_2 kan diagonaliseres, siden den er en 2×2-matrise med to distinkte egenverdier ± 2. A_1 har bare egenverdien 0, med endimensjonalt egenrom (basisvektor $[1,1]^{\mathrm{T}}$) og kan dermed ikke diagonaliseres. A_3 har bare egenverdien 2 med endimensjonalt egenrom (basisvektor $[0,1]^{\mathrm{T}}$) og kan heller ikke diagonaliseres.

5.2.7 side 260: Karakteristisk ligning blir $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ med løsninger $\lambda = 1$ og $\lambda = 5$.
For $\lambda = 1$ finner vi

$$A - I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{egenvektor } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(der $\longrightarrow$ står for reduksjon ved rekkeoperasjoner, som ikke endrer nullrommet).
For $\lambda = 5$ blir

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{egenvektor } \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

At disse oppfyller egengverdiligningene er uttrykt ved $AS = \Lambda S$ der

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 5 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

som gir

$$A^{100} = (S\Lambda S^{-1})^{100} = S\Lambda^{100}S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + 3 \cdot 5^{100} & -3 + 3 \cdot 5^{100} \\ -1 + 5^{100} & 3 + 5^{100} \end{bmatrix}$$

5.2.8 side 261:

(a) $Au = uv^{\mathrm{T}}u = (v^{\mathrm{T}}u)u$ viser at u er en egenverdi for $A = uv^{\mathrm{T}}$ med egenverdi $v^{\mathrm{T}}u$.

(b) Hvis w er en egenvektor med egenverdi λ er $\lambda w = Aw = uv^{\mathrm{T}}w = (v^{\mathrm{T}}w)u$. Hvis $\lambda \neq 0$ så er w et multiplum av u, men da vet vi allerede at den tilhørende egenverdien er $v^{\mathrm{T}}u$. Den andre muligheten er $\lambda = 0$, som skjer når w er ortogonal på v. Det finnes altså ingen andre egenverdier enn $v^{\mathrm{T}}u$ og 0.

(c) $A_{ij} = u_i v_j$ gir $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = v^{\mathrm{T}}u$. Dette er jo også summen av alle egenverdiene ($v^{\mathrm{T}}u$ en gang og $n-1$ nuller).

5.4.1 side 286: Matrisen får karakteristisk polynom $\lambda^2 + 2\lambda$ og dermed egenverdiene 0 og -2.
For $\lambda = 0$ får vi

$$A - 0I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{egenvektor } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

For $\lambda = -2$ får vi

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{egenvektor } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dermed blir $AS = S\Lambda$ for

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & \\ & -2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}S,$$

og

$$e^{tA} = Se^{t\Lambda}S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + e^{-2t} & 1 - e^{-2t} \\ 1 - e^{-2t} & 1 + e^{-2t} \end{bmatrix}$$

DON'T PANIC