75032 Matrisemetoder

Løsningsforslag til oppgaver gitt til onsdag 8/3–95

3.24 side 209: En ukjent $m \times n$-matrise inneholder mn ukjente skalarer, og slik oppgaven er formulert er det gitt bare $m + n$ lineære ligninger til bestemmelse av disse ukjente. For nesten alle mulige valg av m og n er $mn > m + n$, og dermed har man ikke håp om å kunne bestemme alle koeffisientene i matrisen. Det åpenbare unntaket er når $m = 1$ eller $n = 1$, da har oppgaven trivielt et positivt svar.

Det eneste unntaket for øvrig er $m = n = 2$, som leder til fire ligninger $a + b = u$, $c + d = v$, $a + c = x$ og $b + d = y$ der u, v, x og y er de kjente rekke- og søylesummene (og $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$). Koeffisientmatrisen er

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

som desverre er singulær, så problemet kan ikke løses da heller. (Summen av de to første rekkene er like summen av de to siste, som svarer til at summen av alle rekkesummene i A er lik summen av søylesummene, eller $u+v = x+y$. Så blant de fire ligningene er bare tre uavhengige av hverandre).

4.24 side 242: Utvikle determinanten etter siste rekke for å se at den blir et polynom slik som påstått. Polynomet er null for $x \in \{a, b, c\}$ fordi matrisen har to like rekker for de x-verdiene. Dermed følger at $V_4 = C(x - a)(x - b)(x - c)$ hvor konstanten er koeffisienten foran x^3, som akkurat blir kofaktoren til x^3 (som er $V_3 = (b - a)(c - a)(c - b)$).

5.5.7 side 301:

$$A^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = A^{\mathrm{H}} A = \begin{bmatrix} 2 & i & -i \\ -i & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C er hermitisk ($C^{\mathrm{H}} = C$). Dette gjelder alltid for slike matriser, for $C^{\mathrm{H}} = (A^{\mathrm{H}}A)^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}}A = C$ ved bruk av reglene $(BA)^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}}B^{\mathrm{H}}$ og $(A^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}} = A$.

5.5.8 side 301–302:

(i) Jeg finner

$$x = t \begin{bmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{der } t \text{ er vilkårlig.}$$

(ii) Enkel regning som jeg hopper over her (husk å konjugere det som skal konjugeres). Generelt for en $m \times n$-matrise A gjelder

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{N}(A) &\iff Ax = 0 \\ &\iff y^{\mathrm{H}}Ax = 0 \text{ for alle } y \in \mathbf{C}^m \\ &\iff (A^{\mathrm{H}}y)^{\mathrm{H}}x = 0 \text{ for alle } y \in \mathbf{C}^m \\ &\iff x \in (\mathcal{R}(A^{\mathrm{H}}))^{\perp} \end{aligned}$$

5.5.9 side 302:

(a) $\det(A^{\mathrm{H}}) = \det(\bar{A}^{\mathrm{T}}) = \det(\bar{A}) = \overline{\det A}$ der den andre likheten skyldes det $B^{\mathrm{T}} = \det B$, mens den siste kan vises ved den eksplisitte formelen for determinanten, eller ved å utvikle langs en søyle og bruke induksjon på dimensjonen, eller ved å vise direkte at $d(A) = \overline{\det(\bar{A})}$ er en determinant-funksjon (oppfyller aksiomene for determinanten).

(b) Om A er hermitisk blir jo $\overline{\det A} = \det A^{\mathrm{H}} = \det A$ så $\det A$ er reell.

5.5.18 side 303: Ta determinanten av begge sider i definisjonen $U^{\mathrm{H}}U = I$ av hva det vil si at U er unitær. Resultatet er $\overline{\det U}\,\det U = 1$, eller $|\det U|^2 = 1$.

At determinanten kan være et hvilket som helst komplekst tall av absoluttverdi 1, ser vi når vi har løst neste spørsmål:

For at

$$\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$$

skal være unitær, er det nødvendig og tilstrekkelig at de to søylene har lengde 1 og er ortogonale:

$$|\alpha|^2 + |\beta^2| = 1, \quad |\gamma|^2 + |\delta^2| = 1, \quad \bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta = 0.$$

Den siste ligningen, som er lineær i (γ, δ), har generell løsning $(\gamma, \delta) = \lambda(-\bar{\beta}, \bar{\alpha})$ og dermed er den generelle unitære 2×2-matrisen:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\lambda\bar{\beta} \\ \beta & \lambda\bar{\alpha} \end{bmatrix}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta^2| = 1, \quad |\lambda| = 1.$$

Determinanten til denne matrisen er λ.

5.5.19 side 303: Tredje søylen må være ortogonal på de to første, så den ligger i nullrommet til

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -i \\ -i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

som en rekkeoperasjon bringer på formen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -i \\ 0 & i & 2 \end{bmatrix}$$

med nullrom utspent av den ene vektoren $[-i, 2i, 1]^{\mathrm{T}}$. Den siste søylen skal også ha lengde 1, så den må være på formen

$$c\begin{bmatrix} -i \\ 2i \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad |c| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

og valget av c med denne betingelsen er eneste friheten vi har i valget av siste søyle i matrisen.