75032 Matrisemetoder

Løsningsforslag til oppgaver gitt til onsdag 15/3–95

Eksamen mai 1988: 1: Se løsningsforslag i eksamensoppgavesamlingen.

Eksamen mai 1988: 4: Se løsningsforslag i eksamensoppgavesamlingen, men det kan være verdt å merke seg at løsningen som er gitt der er unødig komplisert. Ved å betrakte koeffisientene til det karakteristiske polynomet ser vi at produktet av alle egenverdiene må være $3/4$, for med ledende koeffisient -1, konstantledd $3/4$ og nullpunkter λ_j kan vi skrive $p(\lambda) = -(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$ som har konstantledd $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Siden en av egenverdiene er $1/2$ må produktet av de to andre være $3/2$ slik at en eller begge av dem må ha absoluttverdi > 1, og systemet er ustabilt.

Eksamen august 1988: 3: Se løsningsforslag i eksamensoppgavesamlingen. Den løsningen er nok litt uheldig formulert i starten. Det som skjer er at determinanten utvikles etter siste rekke, og at de to kofaktorene blir determinanter til triangulære matrier, som er trivielle å regne ut.

5.6.3 side 315: A og $A+I$ er ikke similære, for om A har egenverdiene $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vil $A+I$ ha egenverdiene $\lambda_1+1, \dots, \lambda_n+1$. Men similære matriser har de samme egenverdiene.

Dette illustrerer et viktig prinsipp i løsningen av slike oppgaver: Hvis du skal vise at to matriser ikke er similære, så spør deg selv *hva har to similære matriser felles?* og *kan jeg påvise at disse to ikke har dette felles?*

Beviset jeg har gitt er typisk *endeligdimensjonalt.* (Hvor bryter det sammen om A kan ha uendelig mange egenverdier?) Som et eksempel, betrakt vektorrommet som består av alle dobbelt uendelige følger $(\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ og la operatoren A avbilde denne følgen (x_n) på (nx_n); den multipliserer altså ledd nummer n i følgen med n. La skiftoperatoren S være gitt ved at $(Sx)_n = x_{n-1}$. Den flytter alle tallene i følgen ett trinn mot høyre. Jeg finner $AS = SA + S$, slik at $S^{-1}AS = A + I$, som altså ikke er noen umulighet i uendeligdimensjonale rom!

5.6.4 side 315: Om vi følger hintet og lar M være en diagonal matrise med diagonalelementer $\sigma_j = \pm 1$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, er det raskt nok å regne ut

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 2 & \sigma_1\sigma_2 & & \\ \sigma_1\sigma_2 & 2 & \sigma_2\sigma_3 & \\ & \sigma_2\sigma_3 & 2 & \sigma_3\sigma_4 \\ & & \sigma_3\sigma_4 & 2 \end{bmatrix}$$

og det klart at vi får det ønskede resultat om vi for eksempel setter $\sigma_j = (-1)^j$.

Trekker vi fra $2I$ fra hver av de to gitte matrisene, ser vi at matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ er similær med } -C.$$

Dette kan nok virke paradoksalt, for C ser så "positiv" ut. Men det karakteristiske polynomet til C er lett nok å regne ut; det blir $p_C(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^2 + 1$ om jeg ikke har regnet feil, så for hver egenverdi λ er også $-\lambda$ en egenverdi. Denne symmetrien av spektret til C forklarer hvorfor C og $-C$ er similære.

5.6.5 side 315: Vi søker en matrise M med $M^{-1}BAM = AB$. Dersom B er invertibel er det klart at $M = B$ er et godt valg.