75032 Matrisemetoder

Løsningsforslag til oppgaver gitt til onsdag 22/3–95

5.6.15 side 316: Dersom $A^{\mathrm{T}} = \lambda A$ blir $A = (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}} = \lambda^2 A$ så om $A \neq 0$ blir $\lambda^2 = 1$, og $\lambda = \pm 1$. (Samme argument viser at enhver lineæravbildning T som oppfyller $T^2 = I$ ikke har andre egenverdier enn ± 1). Egenvektorene, eller "egenmatrisene", som hører til egenverdien 1 blir de symmetrisk matrisene ($A^{\mathrm{T}} = A$) mens de som hører til egenverdien -1 blir de antisymmetriske matrisene ($A^{\mathrm{T}} = -A$). For øvrig viser identiteten $A = \frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}}) + \frac{1}{2}(A - A^{\mathrm{T}})$ at enhver matrise A kan skrives som en sum av en symmetrisk og en antisymmetriske matrise, slik at de to egenrommene til sammen spenner ut hele rommet av $n \times n$-matriser — og transponering er dermed diagonaliserbar.

5.6.19 side 317: Med

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ & t_{22} & t_{23} \\ & & t_{33} \end{bmatrix}, \quad T^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} \overline{t_{11}} & & \\ \overline{t_{12}} & \overline{t_{22}} & \\ \overline{t_{13}} & \overline{t_{23}} & \overline{t_{33}} \end{bmatrix}$$

regner vi ut

$$TT^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + |t_{13}|^2 & * & * \\ * & |t_{22}|^2 + |t_{23}|^2 & * \\ * & * & |t_{33}|^2 \end{bmatrix},$$

$$T^{\mathrm{H}}T = \begin{bmatrix} |t_{11}|^2 & * & * \\ * & |t_{12}|^2 + |t_{22}|^2 & * \\ * & * & |t_{13}|^2 + |t_{23}|^2 + |t_{33}|^2 \end{bmatrix}$$

hvor jeg har merket de feltene vi ikke trenger regne ut med $*$. Om $TT^{\mathrm{H}} = T^{\mathrm{H}}T$ kan vi sammenligne første element på de to diagonalene og slutte at $t_{12} = t_{13} = 0$ mens en tilsvarende sammenligning av siste diagonalelement gir $t_{13} = t_{23} = 0$. Altså er T diagonal.

Beviset generaliseres lett til generelle $n \times n$-matriser, men da er det greiere å ta diagonalelementene i TT^{H} og $T^{\mathrm{H}}T$i rekkefølge: Etter å ha brukt det første til å se at $t_{12} = t_{13} = 0$ reduseres likheten av de to annen-elementene $|t_{22}|^2 + |t_{23}| = |t_{12}|^2 + |t_{22}|^2$ til $|t_{22}|^2 + |t_{23}| = |t_{22}|^2$ hvorav $t_{23} = 0$. Slik viser man, rekke for rekke, at T er null utenfor diagonalen.

5.6.24 side 317: Den triangulære 3×3-matrisen T har egenverdiene λ_1, λ_2, λ_3 på diagonalen, så produktet $(T - \lambda_1)(T - \lambda_2)(T - \lambda_3)$ får formen

$$\begin{bmatrix} & * & * \\ & * & * \\ & & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ & & * \\ & & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & * \\ & & * \\ & & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & \end{bmatrix}$$

der blanke felt i matrisene er 0 og feltene er merket $*$ kan være hva som helst. Men dette produktet blir åpenbart nullmatrisen (hver rekke i den første matrisen er ortogonal på hver søyle i den andre).

5.16 side 320: I denne oppgaven prøver vi å løse

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

med $\alpha = 0$ eller $\alpha = 4$.

I begge tilfeller får vi ligningene $(a + d)b = 1$ og $(a + d)c = 0$ fra matriselementene utenfor diagonalen. Den første gir $a + d \neq 0$, så den andre gir $c = 0$.

Dermed gir diagonalelementene $a^2 = d^2 = \alpha$, som er umulig å forene med $a + d \neq 0$ når $\alpha = 0$. For $\alpha > 0$, derimot, er det bare å sette $a = d = \sqrt{\alpha}$. Deretter setter vi $b = 1/(a+d) = 1/(2\sqrt{\alpha})$.

5.29 side 321: Vi har altså

$$AS = S\Lambda \text{ og } BS = SC \text{ der } \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Den første ligningen er jo egenverdiligningen for As egenvektorer på standard form, så egenverdiene er diagonalelementene 2 og 1 for Λ og egenvektorer er søyelene i S, altså x_1 og x_2.

Dette argumentet virker ikke direkte på B, fordi C ikke er diagonal. Men for C finner vi de samme egenverdiene (2 og 1) fordi C er triangulær, og egenvektorene krever bare litt mer arbeid: Representative egenvektorer blir $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ for $\lambda = 2$ og $v_2 \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ for $\lambda = 1$. Fra egenvektorene til C lager vi lett egenvektorer for B, for om $Cv = \lambda v$ kan vi sette $u = Sv$ og få $Bu = BSv = SCv = S(\lambda v) = \lambda Sv = \lambda u$. Anvend dette på de to egenvektorene til C og finn egenvektorene for B: For $\lambda = 2$ finner vi $u_1 = Sv_1 = x_1$ og for $\lambda = 1$ finner vi $u_2 = Sv_2 = 3x_1 - x_2$.

Eksamen mai 1991: 1: Se løsningsforslag i eksamensoppgavesamlingen.

Eksamen august 1991: 1:

(a) Vi bruker normalligningene for systemet $Ax = b$, som kan skrives $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$. I dette tilfellet blir

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}, \quad A^{\mathrm{T}}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

og Cramers regel (som *aldri*[1] bør anvendes for matriser større enn 2×2) gir oss

$$(A^{\mathrm{T}}A)^{-1} = \frac{1}{65}\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}, \quad x = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}b = \frac{1}{65}\begin{bmatrix} 1 \\ 14 \end{bmatrix}$$

(b) En mulig formel for den søkte projeksjonen er $P = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$. Utregnet i MATLAB:

```
:   >> A=[2,0;1,2;2,1;0,2]        :                                :
:                                 :                                :
: A =                             :                                :
:                                 :                                :
:      2     0                    :                                :
:      1     2                    :    >> A*ans*A'                 :
:      2     1                    :                                :
:      0     2                    :    ans =                       :
:                                 :                                :
: >> 65*inv(A'*A)                 :        36     2    28   -16    :
:                                 :         2    29    16    28    :
: ans =                           :        28    16    29     2    :
:                                 :       -16    28     2    36    :
:      9    -4                    :                                :
:     -4     9                    :    >>                          :
```

altså

$$P = \frac{1}{65}\begin{bmatrix} 36 & 2 & 28 & -16 \\ 2 & 29 & 16 & 28 \\ 28 & 16 & 29 & 2 \\ -16 & 28 & 2 & 36 \end{bmatrix}$$

[1] *Nesten* aldri i hvert fall