75032 Matrisemetoder

Løsningsforslag til oppgaver gitt til onsdag 29/3–95

Eksamen august 1994: 2:

(a)

$$P = \frac{aa^{\mathrm{T}}}{a^{\mathrm{T}}a} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{a^{\mathrm{T}}b}{a^{\mathrm{T}}a}$$

(for $b - \lambda a$ er minst når $\lambda a = Pb$).

(b) Se løsningsforslaget i oppgavesamlingen.

Eksamen august 1994: 3:

(a) Her må det være en trykkfeil i oppgaven. Det skal stå $A = U\Lambda U^{\mathrm{H}}$.

Å vise at A er normal krever bare å vise at $AA^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}}A$, som er en triviell utregning. Som alltid for 2×2-matriser med like diagonalelementer er det karakteristiske polynomet allerede et fullstendig kvadrat fra naturens side, og dermed lett å faktorisere:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix}a-\lambda & 1\\ -1 & a-\lambda\end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 + 1 = (\lambda - a - i)(\lambda - a + i)$$

så egenverdiene blir $\lambda_{\pm} = a \pm i$. Vi finner

$$A - \lambda_{\pm} = \begin{bmatrix}\mp i & 1\\ -1 & \mp i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ \mp i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mp i & 1\end{bmatrix}$$

som har nullrom utspent av $[1, \pm i]^{\mathrm{T}}$. Deler vi med $\sqrt{2}$ for normaliseringens skyld ender vi med

$$\Lambda = \begin{bmatrix}a+i & \\ & a-i\end{bmatrix}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{bmatrix}$$

(b) Ligningen har løsning

$$\begin{aligned} y = e^{tA}y(0) = Ue^{t\Lambda}U^{\mathrm{H}}y(0) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}i & -i\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{(a+i)t} & \\ & e^{(a-i)t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-i & 1\\ i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\\ &= e^{at}\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} = e^{at}\begin{bmatrix}\cos t + \sin t\\ \cos t - \sin t\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(utregningen går greiere om man trekker ut faktoren e^{ta} før man setter i gang å multiplisere matrisene).

(c) Stabilitet for $a < 0$, da har begge egenverdiene negativ realdel.

Eksamen august 1994: 4:

(a) Vanlig Gausseliminasjon uten pivotering gir $B = LU$ med

$$L = \begin{bmatrix}1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ & -1 & -1 & 0\\ & & 1 & 1\\ & & & -2\end{bmatrix}$$

Lar vi D være diagonalmatrisen med samme diagonalelementer som U, viser en rask utregning[1] at $D^{-1}U = L^{\mathrm{T}}$, slik at $B = LU = LDL^{\mathrm{T}}$ som ønsket.

[1] Kan gjøres i hodet, siden multiplikasjon med en diagonalmatrise på venstre side multipliserer rekkene med diagonalelementene i diagonalmatrisen.

(b) Se løsningsforslaget i oppgavesamlingen. Der brukes $\mathcal{E}$ om standardbasisen (den "naturlige basisen") for $\mathbf{R}^4$, og notasjonen $I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ for det jeg har kalt $[I]_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}$ i forelesningene (og som Strang kaller $[I]_{\mathcal{B}\text{ to }\mathcal{E}}$). Merk at denne matrisen blir B, for søyle j i $[I]_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}$ skal være koordinatvektoren til $I(b_j)$ uttrykt i basisen $\mathcal{E}$, og det er jo b_j selv. Matrisen på høyresiden av produktet blir $[I]_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}^{-1} = B^{-1}$.

(c) Det er klart at $L^4 = I$, så $A^4 = I$. Derfor må egenverdiene oppfylle $\lambda^4 = 1$, så $\lambda \in \{1, i, -1, -i\}$. Det er greiest å finne egenvektorene til L først. Om $\lambda^4 = 1$ er $\lambda^3 b_1 + \lambda^2 b_2 + \lambda b_3 + b_4$ en egenvektor for L med egenverdi λ.[2] Setter vi inn $\lambda = 1, i, -1, -i$ i tur og orden finner vi egenvektorene

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1-i \\ -2i \\ 2 \\ i-1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i-1 \\ 2i \\ 2 \\ -i-1 \end{bmatrix}.$$

[2] Dette kan du også finne ut ved å regne ut egenvektorene til $[L]_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}}$ på mer konvensjonelt vis.