75032 Matrisemetoder

Løsningsforslag til oppgaver gitt til onsdag 26/4–95

Eksamen juni 1993: 2:

(a) En rask Gausseliminasjon viser at $\mathcal{N}A^{\mathrm{T}}$ er definert ved $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$, så dette rommet er todimensjonalt. En passende ortonormal basis bestående av

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \text{ og } \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

finner man lett, til og med ved inspeksjon ("stirremetoden"): Den første oppstår naturlig ved at man setter $x_2 = 0$. Vektorer ortogonalt på den første må da ha $x_1 + x_3$, og setter man disse lik 1 og normaliserer etterpå kommer den andre naturlig frem.

I SVD-en $A = Q_1 \Sigma Q_2^{\mathrm{T}}$ skal jo Q_1 diagonalisere $AA^{\mathrm{T}} = Q_1 \Sigma \Sigma^{\mathrm{T}} Q_1^{\mathrm{T}}$, så søylene i Q_1 skal være en ortonormal basis av egenvektorer for AA^{T}. Vi har alt funnet to elementer i en slik basis, siden $\mathcal{N}(AA^{\mathrm{T}}) = \mathcal{N}(A^{\mathrm{T}})$. Den siste må da være ortogonal på de to første, som leder til vektoren

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \text{ og dermed } Q_1 = \begin{bmatrix}1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

der vi satte søylen vi fant sist først, fordi den svarer til den eneste singulærverdien $\neq 0$ (og dermed den største). Direkte utregning viser at vektoren faktisk er en egenvektor for AA^{T} med egenverdi 30, slik at singulærverdien blir $\sqrt{30}$.

Vi skal ha $A^{\mathrm{T}} = Q_2 \Sigma^{\mathrm{T}} Q_1^{\mathrm{T}}$ eller $A^{\mathrm{T}} Q_1 = Q_2 \Sigma^{\mathrm{T}}$, og derfor skal $\sqrt{30}$ ganger første søyle i Q_2 være første søyle i $A^{\mathrm{T}} Q_1$, mens 0 ganger annen søyle i Q_2 skal være annen søyle i $A^{\mathrm{T}} Q_1$. Etter litt mer regning leder dette til

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix} \text{ der altså } \Sigma = \begin{bmatrix}\sqrt{30} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Første søylen i Q_2 er altså første søyle i $A^{\mathrm{T}} Q_1$ dividert med $\sqrt{30}$ mens den andre simpelthen er funnet ut fra at Q_2 skal være en ortogonal matrise, siden formelen $A^{\mathrm{T}} Q_1 = Q_2 \Sigma$ ikke gir noen informasjon om denne søylen.

(b) Vi finner $A^{+} = Q_2 \Sigma^{+} Q_1^{\mathrm{T}}$ der

$$\Sigma^{+} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{30} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \text{ og dermed } A^{+} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\end{bmatrix} \text{ som gir } AA^{+} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix} = vv^{\mathrm{T}}$$

der $v = (1/\sqrt{6})[1, 2, 1]^{\mathrm{T}}$. Dette er ortogonalprojeksjonen på underrommet utspent av v, det vil på $\mathcal{R}(A)$. Svaret på siste spørsmål er

$$A^{+}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

Eksamen juni 1993: 3:

(a) $Ax = \lambda x$ med $x \neq 0$ gir oss $A^2 x = \lambda A x = \lambda^2 x$, men på den annen side om $A^2 = A$ skal vi jo ha $A^2 x = Ax = \lambda x$. De to formlene gir $\lambda^2 = \lambda$, hvorav $\lambda \in \{0, 1\}$.

Det er lett å se at om $A^2 = A$ må samme identitet holde for hver Jordanblokk i Jordanformen for A. Men

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \\ & \lambda^2 & 2\lambda & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

så en slik Jordanblokk J kan ikke oppfylle $J^2 = J$ hvis den en større enn 1×1. Dermed er alle Jordanblokker 1×1, og matrisen er diagonaliserbar.

Et alternativt bevis, som gir langt bedre forståelse, er å merke seg at når $A^2 = A$ kan hver vektor i $\mathbf{R}^n$ skrives entydig som $x = y + z$ der $y \in \mathcal{R}(A)$ og $z \in \mathcal{N}(A)$: $x = Ax + (x - Ax)$ er jo en slik oppspalting av x siden $Ax \in \mathcal{R}(A)$ og $A(x - Ax) = Ax - A^2x = 0$ så $x - Ax \in \mathcal{N}(A)$.

Entydigheten følger ved å merke seg at om $x = y + z$ med $y \in \mathcal{R}(A)$ og $z \in \mathcal{N}(A)$ så er $Ax = Ay + Az = Ay + 0 = Ay$; og siden $y \in \mathcal{R}(A)$ kan vi skrive $y = Av$ for en eller annen vektor v, hvorav $Ay = A^2v = Av = y$, så vi har altså $y = Ax$ og dermed $z = x - y = x - Ax$.

Av alt dette følger det raskt at om vi velger en basis $y_1, \dots, y_r$ for $\mathcal{R}(A)$ og en basis $z_1, \dots, z_{n-r}$ for $\mathcal{N}(A)$, vil disse to basisene til sammen danne en basis for $\mathbf{R}^n$. Men vektorene y_i er egenvektorer for A med egenverdi 1, mens vektorene z_j er egenvektorer med egenverdi 0. Altså er A diagonaliserbar.

(b) Siden $A^0 = I$ og $A^k = A$ for alle $k \geq 1$ (vises lett ved induksjon på k), er

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A = I + (e^t - 1)A$$

Matrisen M i oppgaven er en ortogonal prosjeksjon, så dette kan anvendes på M. Dermed er

$$x(t) = e^{tM}x(0) = \big(I + (e^t - 1)M\big) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + 3(e^t - 1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eksamen juni 1993: 4: Ersttatter vi første rekke med seg selv minus annen rekke, deretter annen rekke med seg selv minus tredje rekke og så videre, finner vi at den søkte determinanten er lik

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$$

Vi ser at nabolinjene er mye "likere" her enn i den opprinnelige determinanten. Vi kan gjenta suksessen, og får da uttrykket

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$$

for determinanten, som vi utvikler etter første søyle. Begge underdeterminantene vi da får blir nedre triangulære, så disse determinantene kan regnes ut direkte. Holder vi tunga rett i munnen og passer på fortegnene, ender vi med uttrykket

$$(-1)^n(-2)^{n-2}n + (-1)^{n-1}(-2)^{n-2}(-1) = 2^{n-2}(n+1)$$

for determinanten. Denne oppgaven var en *typisk nøtt*!

Eksamen august 1993: 5: Setter vi $x_i = 0$ når $i < 0$ gjelder formelen $Mx_i = x_{i-1}$ for alle $i \leq k$, også negative i, og vi finner lett $M^j x_i = x_{i-j}$ ved induksjon på j. Dette gir spesielt $M^j x_i = 0$ når $j > i$.

Anta nå at vi har en lineær avhengighet $\sum_{i=0}^{k} c_i x_i = 0$. Hvis ikke alle $c_i = 0$, finnes en største indeks j med $x_j \neq 0$, slik at vi kan skrive $\sum_{i=0}^{j} c_i x_i = 0$ der $c_j \neq 0$. Anvender vi nå M^j på dette faller alle leddene unntatt for $i = j$, og vi har $c_j x_0 = 0$ i motstrid med $c_j \neq 0$ og antagelsen $x_0 = 0$. Altså er vektorene $x_0, \ldots, x_k$ lineært uavhengige.

Om M er diagonaliserbar, kan vi finne basis av egenvektorer v_i for M der $Mv_i = \lambda_i v_i$. Hver $x \in \mathbf{R}^n$ kan da skrives som lineærkombinasjon av disse, og spesielt $x_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$. Anvender vi M på denne identiteten først en gang og så en gang til, får vi

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i v_i, \quad 0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^2 v_i.$$

Siden vektorene v_i er lineært uavhengige impliserer den siste formelen at $c_i \lambda_i^2 = 0$, og dermed $c_i \lambda_i = 0$ slik at $x_0 = 0$ i følge den første formelen. Dette strider mot antagelsen.