75032 Matrisemetoder

Løsningsforslag til oppgaver gitt til onsdag 3/5–95

B.1 side 459:

Tilfellet A er ganske trivielt, siden matrisen viser seg å være diagonaliserbar. Jeg får $AM = MJ$ med

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

For B sitt tilfelle finner vi at B virker som nulloperatoren på $\mathcal{R}(B)$, som for øvrig er utspent av vektoren v_1:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

I følge algoritmen skal vi finne en vektor v_2 med $Bv_2 = v_1$, som for eksempel kan løses med $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ (denne løsningen er *ikke* entydig, siden B jo er singulær). Endelig skal vi utvide til en basis v_2, v_3 for $\mathcal{N}(B)$, som gir oss enda litt valgfrihet. Så setter vi inn v_1, v_2 og v_3 som søylene i M, og ender med $BM = MJ$ der

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

B.3 side 459: I dette tilfellet blir $J^2 = 0$, så hele potensrekken for e^{tJ} koker ned til de første to leddene:

$$e^{tJ} = I + tJ = \begin{bmatrix} 1 & t & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{og dermed } e^{tB} = \begin{bmatrix} 1 & t & 2t \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

der vi finner $e^{tB} = Me^{tJ}M^{-1}$ enten direkte, eller (smartere) ved å merke oss at vi får $e^{tB} = Me^{tJ}M^{-1} = M(I + tJ)M^{-1} = I + tB$, eller ved å se at $B^2 = (MJM^{-1})^2 = J^2 = 0$, slik at $e^{tB} = I + tB$ av samme grunn som $e^{tJ} = I + tJ$.

6.2.1 side 337: Når vi skal regne ut det karakteristiske polynomet til A, kan vi på grunn av den spesielle formen på matrisen regne ut $\det(A) = (a-1)^2(a+2)$ og deretter erstatte a med $a - \lambda$, slik at $p_A(\lambda) = (a-1-\lambda)^2(a+2-\lambda)$. Dette gir egenverdiene $a-1$ (med multiplisitet 2) og $a+2$, og A er positivt definit hvis og bare hvis begge er positive, altså $a > 1$.

Gjør vi Gausseliminasjon fra første søyle i B, får vi

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & b & 8 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & b-2 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

og vi vet at B er positivt definit hvis og bare hvis pivoten er det (den er 2), og 2×2-matrisen i nedre høyre hjørne er det. Men sistnevnte har jo -1 på diagonalen, så den er ikke positivt definit for noen valg av b.

Alternativt (nå som vi ser at b er irrelevant), kan vi kikke på matrisen vi får ved å stryke midtre søyle og midtre rekke i B. Da får vi en matrise med determinant $2 \cdot 7 - 4 \cdot 4 = -2 < 0$, så B kan ikke være positivt definit.

6.2.3 side 337: Den søkte determinanten kan skrives slik, der jeg først Gausseliminerer i første søyle og deretter utvikler langs første søyle:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & b & -b \\ b & 1 & b \\ -b & b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b & -b \\ 0 & 1-b^2 & b+b^2 \\ 0 & b+b^2 & 1-b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-b^2 & b+b^2 \\ b+b^2 & 1-b^2 \end{vmatrix} = (1-b^2)^2 - (b+b^2)^2$$

som blir et fjerdegradspolynom i b, så før man ganger ut lønner det seg å se etter felles faktorer og ta vare på de. Siden $1-b^2=(1-b)(1+b)$ er åpenbart $(1+b)^2$ en felles faktor, og setter man den utenfor og regner videre ender man med $\Delta=(1+b)^2(1-2b)$ som åpenbart blir negativt når $b>1/2$.

Eksamen mai 1990: 4: Vi følger hintet, og ser hvordan mulitplikasjon med M virker på en vektor x:

$$Mx=\begin{bmatrix}1&&&\\-1&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2-x_1\\\vdots\\x_n-x_{n-1}\end{bmatrix}$$

så spesialiserer vi dette til søyle j i A ser vi at $i$te posisjon i svaret blir $a_{i,j}-a_{i-1,j}=a_{i,j-1}$ når $i>1$, og dermed blir hver søyle flyttet en plass til høyre — søyle j i MA blir en kopi av søyle j i A, mens første søyle i MA blir $\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Dette ser kanskje ikke ut som det hjelper så veldig, men om man multipliserer fra høyre med M^{T} får man samme effekt, men denne gang på rekkene i stedet for på søylene, og vi ender med

$$MA_n==\begin{bmatrix}1&0\\0&A_{n-1}\end{bmatrix}$$

som uten videre viser at A_n og A_{n-1} har samme determinant, som dermed blir 1 siden $\det(A_1)=1$.

Eksamen juni 1993: 5:

(a) A_k er positivt definit fordi, om vi har gitt $x\in\mathbf{R}^{n-1}$ og setter $y=[x_1,\ldots,x_{k-1},0,x_k,\ldots,x_n]^{\mathrm{T}}$ så er $x^{\mathrm{T}}A_kx=y^{\mathrm{T}}Ay>0$. A_k er inverterbar fordi enhver positivt definit matrise er inverterbar (alle egenverdiene er >0, så 0 er ingen egenverdi). A_k^{-1} er positivt definit fordi den inverse av enhver positivt definit matrise er positivt definit.

Dette kan man se fordi egenverdiene til A^{-1} er λ_i^{-1} der λ_i er egenverdiene til A, eller ved å merke seg at $x^{\mathrm{T}}A^{-1}x=(A^{-1}x)^{\mathrm{T}}A(A^{-1}x)>0$ fordi A er positivt definit (her har jeg utnyttet symmetrien til A^{-1}).

(b) Matrisen E gitt i oppgaven har determinant 1, siden den er triangulær med enere på diagonalen. Derfor er

$$\det(A)=\det(EA)=\begin{vmatrix}A_n&c\\0&a_{nn}-c^{\mathrm{T}}A_n^{-1}c\end{vmatrix}=(a_{nn}-c^{\mathrm{T}}A_n^{-1}c)\det(A_n)\le a_{nn}\det(A_n)$$

(siste ulikhet fordi $c^{\mathrm{T}}A_n^{-1}c\ge0$ og $\det(A_n)>0$). Ulikheten $\det(A)\le a_{11}\cdots a_{nn}$ følger nå ved induksjon.

(c) Om B er inverterbar, eller mer generelt har lineært uavhengige søyler, og $x\neq0$ er $x^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}B)x=\|Bx\|^2>0$.

For matrisen C finner vi $(\det C)^2=\det(C^{\mathrm{T}}C)$, men diagonalelementene i $C^{\mathrm{T}}C$ er nettopp $\|c_j\|^2$, så den søkte ulikheten følger av punkt (a). Unntaket er når C er singulær, men da er jo $\det C=0$ så da er ulikheten trivielt oppfylt.