DRAFT 1995-02-07 13:33

Teorem 1 (Plassmangelteoremet, konkret versjon) *Om n vektorer i $\mathbf{R}^m$ er lineært uavhengige, er $n \leq m$.*

Bevis: La de n vektorene være søylene i en matrise A. Da har ligningen $Ax = 0$ bare den trivielle løsningen $x = 0$. Men A har en trappedekomposisjon $PA = LU$, og $Ax = 0$ er ekvivalent med $Ux = 0$. U har høyst m pivotelementer, så hvis $n > m$ vil ikke alle søyler inneholde et slikt — det vil si at det finnes fri variable. Man kan velge de fri variable så de ikke alle er 0, og løse med hensyn på basisvariablene ved tilbakesubstitusjon, slik at man ender med en ikketriviell løsning av $Ax = 0$. Dette er en motsigelse, og antagelsen $n > m$ må derfor være feil. □

Teorem 2 (Plassmangelteoremet, abstrakt versjon) *Om $v_1, \ldots, v_m$ spenner ut et vektorrom V og $w_1, \ldots, w_n \in V$ er lineært uavhengige, er $n \leq m$.*

Bevis: Siden $v$ene utspenner V kan hver w skrives som lineærkombinasjon av $v$ene:

$$w_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Men siden $w$ene er lineært uavhengige vil

$$\sum_{j=1}^{n} c_j w_j = 0 \Longrightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

Men

$$\sum_{j=1}^{n} c_j w_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \right) v_i,$$

og derfor gjelder

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = 0 \text{ for } i = 1, \ldots, m \Longrightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

Matrisen (a_{ij}) har altså lineært uavhengige søyler, men disse søylene er n i tallet og ligger i $\mathbf{R}^m$, så $n \leq m$ ved det konkrete plassmangelteoremet. □

Ved å anvende dette teoremet i begge retninger på to basiser får vi:

Korollar 3 *To basiser for et vektorrom har samme antall elementer.*