Et eksempel fra differensialgeometri (gjennomgått i kurset i matrisemetoder, mars 1995).

I dette eksemplet skal vi betrakte flaten S i $\mathbf{R}^3$ gitt ved ligningen

$$z = xy.$$

Nedadrettet enhetsnormalvektor til S i et punkt (x, y, z) på flaten kan skrives

$$\mathbf{G}(x, y, z) = \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \begin{bmatrix} y \\ x \\ -1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

og *tangentplanet* T til S er definert som ortogonalkomplementet til normalvektoren.

Merk at T avhenger av hvilket punkt (x, y, z) vi betrakter, så vi burde kanskje skrive $T_{x,y,z}$ i stedet for bare T.

Du er kanskje vant til en annen definisjon, der et punkt (u, v, w) tilhører tangentplanet til S i punktet (x, y, z) dersom $(u - x, v - y, w - z)$ er ortogonalt på $\mathbf{n}$. Den definisjonen er mer geometrisk tiltalende, mens den vi bruker her har den fordelen at T er et vektorrom, så vi kan uten videre bruke alt vi kan av lineæralgebra. Men tenk gjerne på en "tangentvektor" $(\xi, \eta, \zeta) \in T$ som en pil med fotpunkt i (x, y, z) og spissen i $(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)$.

Om $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ er en deriverbar vei i S ser man uten videre at $\dot{\gamma} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \in T$, og alle tangentvektorer i et gitt punkt fremkommer som $\dot{\gamma}(t)$ for minst én passende vei γ gjennom punktet.

Avbildningen $\mathbf{G}$ definert i ligning (1) kalles *Gauss-avbildningen*. Dens deriverte $\mathbf{L}$ kalles *Weingarten-avbildningen*. Mer presist formulert kan vi si det slik: Betrakt en vei γ i S, og beregn den deriverte av $\mathbf{G}(\gamma(t))$. Etter litt regning får vi

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G}(\gamma(t)) = (1 + x^2 + y^2)^{-3/2} \left(\big((1 + x^2)\dot{y} - xy\dot{x}\big) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{bmatrix} + \big((1 + y^2)\dot{x} - xy\dot{y}\big) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{bmatrix} \right). \tag{2}$$

Vi merker oss at høyresiden tilhører T, som ikke skulle være noen stor overraskelse (derivér ligningen $\mathbf{G}(\gamma(t))^{\mathrm{T}}\mathbf{G}(\gamma(t)) = 1$). Mer spennende er det at høyresiden er en lineær funksjon av $\dot{\gamma} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$, og dermed definerer en lineæravbildning $L\colon T \to T$ som er hva vi kaller Weingarten-avbildningen.

Vi sa jo i starten at L skulle være den deriverte av $\mathbf{G}$, og kjerneregelen gir da $(d/dt)\mathbf{G}(\gamma(t)) = \mathbf{G}'\dot{\gamma}(t) = L\dot{\gamma}(t)$. Men fordi $\mathbf{G}$ i utgangspunktet bare var definert på S, og det ikke er helt lynende klart hvordan man deriverer funksjoner fra S inn i $\mathbf{R}^3$, tok vi denne lille omveien for å definere L.

Egenverdiene til Weingarten-avbildningen kalles flatens *hovedkrumninger*, og de tilhørende egenvektorer (eller egenrom) er flatens *hovedretninger*.

Vektorene på høyresiden i (2) danner en hendig basis for T, og vi setter navn på disse:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{bmatrix}.$$

Betrakt en vei γ i S gjennom et fast punkt på S. Dersom $\dot{\gamma} = u_1$ så er jo $\dot{x} = 1$ og $\dot{y} = 0$, så høyresiden i (2) blir

$$Lu_1 = (1 + x^2 + y^2)^{-3/2} \left(-xy \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{bmatrix} + (1 + y^2) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{bmatrix} \right) = -xyu_1 + (1 + y^2)u_2$$

På den annen side, om $\dot{\gamma} = u_2$ så er $\dot{x} = 0$ og $\dot{y} = 1$, så høyresiden i (2) blir

$$Lu_2 = (1 + x^2 + y^2)^{-3/2} \left((1 + x^2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{bmatrix} - xy \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{bmatrix} \right) = (1 + x^2)u_1 - xyu_2$$

Matrisen til Weingarten-avbildningen L i denne basisen blir dermed

$$[L]_{u\to u} = (1+x^2+y^2)^{-3/2}\begin{bmatrix} -xy & 1+x^2 \\ 1+y^2 & -xy \end{bmatrix}.$$

Enkel regning gir de to egenverdiene

$$\lambda_\pm = (1+x^2+y^2)^{-3/2}\bigl(-xy \pm \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}\bigr)$$

for matrisen $[L]_{u\to u}$, og med tilhørende egenvektorer

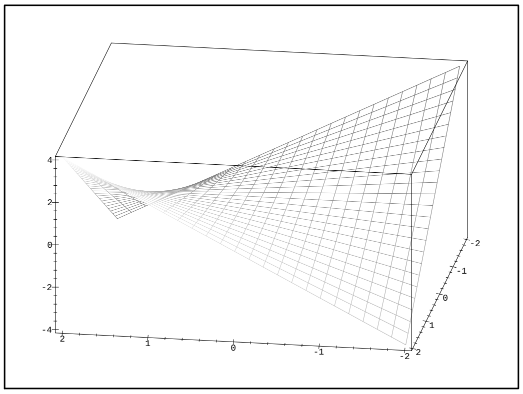
$$\begin{bmatrix} \pm\sqrt{1+x^2} \\ \sqrt{1+y^2} \end{bmatrix} \tag{3}$$

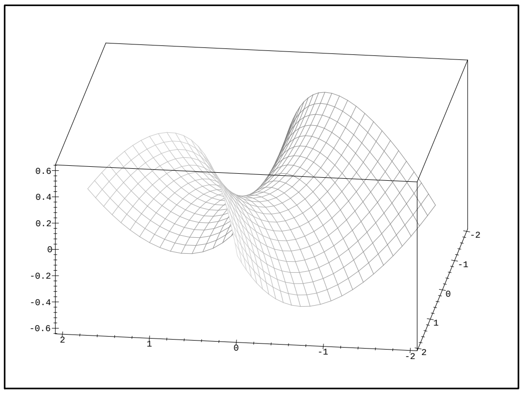
(der $\mp$ betyr $-$ for egenverdien λ_+ og $+$ for λ_-).

Til basisen u hører basisavbildningen $B_u\colon \mathbf{R}^2 \to T$ gitt ved $B_u(\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}) = c_1 u_1 + c_2 u_2$ og den omvendte, koordinatavbildningen $C_u = B_u^{-1}\colon T \to \mathbf{R}^2$. Basisavbildningen B_u avbilder egenvektorene i (3) til egenvektorene

$$v_\pm = \pm\sqrt{1+x^2}\,u_1 + \sqrt{1+y^2}\,u_2 = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{1+x^2} \\ \sqrt{1+y^2} \\ x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2} \end{bmatrix}$$

for Weingarten-avbildningen L. Disse bestemmer altså de to hovedretningene i flaten S. Man kan legge merke til at de to hovedretningene er ortogonale på hverandre, og det er ingen tilfeldighet — men det vil føre for langt av sted å forklare hvorfor her.





I disse to figurene peker x-aksen mot høyre og y-aksen innover. I figuren til venstre er $z = xy$ plottet ganske likefrem. I figuren til høyre har jeg brukt en alternativ parametrisering av flaten i nye koordinater (s,t) slik at hovedretningene peker langs $s =$ konstant og $t =$ konstant. Fordi figuren til høyre ikke inneholder (x,y)-verdier helt ut i hjørnene av rektanglet $[-2,2]\times[-2,2]$, har tegneprogrammet (`plot3d` i Maple) skalert z-aksen annerledes.