Teorem 1 (Trappedekomposisjon) *For enhver matrise A finnes en permutasjonsmatrise P, en nedre triangulær matrise L med enere på diagonalen, og en matrise U på trappeform slik at $PA = LU$.*

Bevis: Dette vises ved induksjon på antall søyler i A. Hvis A har bare en søyle, er A allerede på trappeform, så vi kan skrive $P = I$, $L = I$ og $U = A$.

Anta nå at teoremet holder for matriser A med n søyler (dette kaller vi *induksjonshypotesen*) og la A ha $n+1$ søyler.

Hvis første søyle i A har bare nuller, skriver vi $A = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{A} \end{bmatrix}$ der den første nullen står for første søyle i A og $\tilde{A}$ har n søyler. Ved induksjonshypotesen kan vi skrive en trappedekomposisjon $P\tilde{A} = L\tilde{U}$, men da er $PA = P\begin{bmatrix} 0 & \tilde{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P\tilde{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & L\tilde{U} \end{bmatrix} = LU$ der $U = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{U} \end{bmatrix}$ er på trappeform.

Litt vanskeligere blir det om første søyle i A ikke har bare nuller. Velg et rekkenummer i slik at $a_{i1} \neq 0$, og la P_1 være permutasjonsmatrisen som bytter om rekkene 1 og i, slik at $P_1 A$ har $a_{i1} \neq 0$ i øverste venstre hjørne. Bruk denne til å eliminere alle andre elementer i første søyle: Det vil at vi kan finne en matrise L_1 slik at $P_1 A = L_1 U_1$ der

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell & I \end{bmatrix}, \quad U_1 = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i1} & u \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix}$$

(Om vi fjerner første rad og søyle i U_1, står vi igjen med matrisen fylt med $* \dots *$, som vi kaller $\tilde{A}$. u er en rekkevektor, og 0 i annen rekke er en søylevektor. På samme måte er ℓ en søylevektor. Jeg skriver flere 2×2-matriser nedenfor, der i virkeligheten nederste høyre hjørne er en matrise, øverste venstre hjørne er skalar, og de to andre elementene er vektorer slik at dimensjonene passer).

Ved induksjonshypotesen anvendt på $\tilde{A}$ kan vi skrive trappedekomposisjonen $\tilde{P}\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{U}$. Setter vi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{bmatrix} P_1, \quad \tilde{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{bmatrix} L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{P}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

så blir

$$PA = \tilde{L}_1 \begin{bmatrix} a_{i1} & u \\ 0 & \tilde{P}\tilde{A} \end{bmatrix} = \tilde{L}_1 \begin{bmatrix} a_{i1} & u \\ 0 & \tilde{L}\tilde{U} \end{bmatrix} = LU$$

der

$$L = \tilde{L}_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{L} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} a_{i1} & u \\ 0 & \tilde{U} \end{bmatrix}$$

Det gjenstår å sjekke at L og U virkelig har de rette formene, men det overlater vi til leseren. □