75032 Matrisemetoder 16. august 1988: Løsningsforslag

Løsningsforslaget var opprinnelig skrevet bare som et notat til sensor, og kan til tider være noe for kortfattet eller kryptisk. Likevel kan det kanskje være av en viss nytteverdi.

Oppgave 1

a

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

b A er positiv definit fordi pivotelementene ved Gauss-eliminasjonen alle var 0. (Pivotelementene står på diagonalen i U). Vi beholder L fra punktet foran, lar D være diagonalmatrisen med samme diagonalelementer som U. Det er enkelt å sjekke at $DL^{\mathrm{T}} = U$, som også teorien forutsier.

c $x = [1 \quad 2 \quad 0 \;\, -1]^{\mathrm{T}}$.

Oppgave 2

a Et hvilket som helst ortonormalt par av vektorer er riktig, så lenge første og fjerde komponent er like, og annen og tredje komponent også er like. ($\mathcal{N}(B^{\mathrm{T}}) = \mathcal{R}(B)^{\perp}$, og $\mathcal{R}(B)$ er åpenbart todimensjonal. Ved å danne lineærkobinasjoner av søylene i B ser vi at $[0 \quad 1 \;\, -1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ og $[1 \quad 0 \quad 0 \;\, -1]^{\mathrm{T}}$ er basis for $\mathcal{R}(B)$).

b Vi regner ut

$$B^{\mathrm{T}}B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Av dette finner vi egenverdiene λ_i til $B^{\mathrm{T}}B$, singulærverdiene $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, og de normaliserte egenvektorene v_i til $B^{\mathrm{T}}B$:

i	λ_i	σ_i	v_i^{T}
1	16	4	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,[1 \quad 0 \quad 1]$
2	1	1	$[0 \quad 1 \quad 0]$
3	0	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,[1 \quad 0 \;\, -1]$

Så vi får

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad Q_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & * & * \\ -1 & 1 & * & * \\ 1 & -1 & * & * \\ -1 & -1 & * & * \end{bmatrix}$$

(fyll inn svaret fra forrige punkt i de to siste søylene i Q_1).

c $x = B^+ = Q_2\Sigma^+Q_1^{\mathrm{T}}b = Q_2\Sigma^+\left[4\sqrt{2}\ 2\ *\ *\right]^{\mathrm{T}} = Q_2\left[\sqrt{2}\ 2\ 0\right]^{\mathrm{T}} = [1\ 2\ 1]^{\mathrm{T}}$.

Oppgave 3

a Utvikles etter første eller siste rad eller søyle. Vi får $\prod_1^n a_k - (-1)^n \prod_1^n b_k$.

b $e^{2\pi ik/n}, \quad k = 0, \ldots, n-1$.

Oppgave 4

La A være en slik matrise. Siden den er symmetrisk, har den enda en egenvektor ved spektralteoremet, og denne er normal på de to første. Inspeksjon gir at $[1\ 0\ 1]^{\mathrm{T}}$ er en kandidat. Vi normaliserer alle tre egenvektorer, og lar dem være søyler i en matrise:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Hvis vi lar λ være egenverdien tilsvarende 3. egenvektor, får vi

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad A = V\Lambda V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda & 1 & \frac{1}{2}\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2}\lambda & -1 & \frac{1}{2}\lambda \end{bmatrix}.$$

Oppgave 5

Formelen for x kan skrives $x = Sc$, så $c = S^{-1}x$, siden S er invertibel.