75032 Matrisemetoder 15. august 1995: Løsningsforslag

Oppgave 1

a Standard Gausseliminasjon på A gir

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 8 & -7 & 2 \\ 17 & -16 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -15/2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

og $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(U)$ som er utspent av $[1 \;\; 2 \;\; 3]^{\mathrm{T}}$. a_1 og a_2 danner en basis for $\mathcal{R}(A)$ fordi første og annen søyle i U har pivotelementer. Fra nullvektoren over ser vi at $a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$, slik at $a_3 = -(1/3)a_1 - (2/3)a_2$. (Dette gir et annet og mer direkte argument for at a_1 og a_2 utspenner $\mathcal{R}(A)$ siden a_1, a_2 og a_3 gjør det og den siste er en lineærkombinasjon av de to andre.)

b $Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$ generelt, så

$$\begin{aligned} Aa_1 &= 2a_1 + 8a_2 + 17a_3 = 2a_1 + 8a_2 + 17(-\frac{1}{3}a_1 - \frac{2}{3}a_2) = -\frac{11}{3}a_1 - \frac{10}{3}a_2, \\ Aa_2 &= -1a_1 - 7a_2 - 16a_3 = -1a_1 - 7a_2 - 16(-\frac{1}{3}a_1 - \frac{2}{3}a_2) = \frac{13}{3}a_1 + \frac{11}{3}a_2. \end{aligned}$$

Dermed blir

$$B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -11 & 13 \\ -10 & 11 \end{bmatrix}.$$

c Hver egenverdi λ for A må oppfylle $\lambda^3 + \lambda = 0$. Dermed er en eneste mulighetene $\lambda \in \{0, i, -i\}$. Vi vet fra før at $\lambda = 0$ er en egenverdi siden A har et ikketrivielt nullrom. Summen av egenverdiene er $\mathrm{tr}(A) = 0$, og dermed er egenverdiene $\{0, i, -i\}$ (strengt tatt har vi ennå ikke utelukket at alle egenverdiene er 0, men i så fall skulle vi hatt $A^3 = 0$ (som man ser av Jordanformen til A), og det er ikke tilfelle).

Oppgave 2

a Vi finner

$$A^{\mathrm{T}}A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}25 & 7\\ 7 & 25\end{bmatrix}$$

med egenverdier gitt av $(25-2\lambda)^2 - 7^2 = 0$, eller $2\lambda = 25 \pm 7$ altså $\lambda = 16$ og $\lambda = 9$, som gir singulærverdiene 4 og 3.

For $\lambda = 16$ finner vi

$$A^{\mathrm{T}}A - 16I = \frac{7}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}, \quad \text{normalisert nullvektor } q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.$$

For $\lambda = 9$ finner vi

$$A^{\mathrm{T}}A - 16I = \frac{7}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \quad \text{normalisert nullvektor } q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}.$$

q_1 og q_2 blir søylene i Q_2. Av $Q_1\Sigma = AQ_2$ ser vi umiddelbart at de to første søylene i Q_1 blir $4^{-1}Aq_1$ og $3^{-1}Aq_2$, og vi har altså tilsammen

$$Q_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & * & *\\ 3 & -2 & * & *\\ 0 & 3 & * & *\\ 3 & 2 & * & *\end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

De to siste søylene i Q_1 er lite interessante fordi, når man multipliserer ut produktet $A = Q_1\Sigma Q_2^{\mathrm{T}}$, vil disse søylene bare multipliseres med nullene nederst i Σ, og dermed ikke gi noe bidrag til produktet.

b Den pseudoinverse til A er $A^+ = Q_2\Sigma^+Q_1^{\mathrm{T}}$ der den pseudoinverse til Σ er gitt ved

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix}1/4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Projeksjonsmatrisen på $\mathcal{R}(A)$ er AA^+. En minste kvadraters løsning til $Ax = b$ er gitt ved $x = A^+b$, fordi $Ax = AA^+b$ da er projeksjonen av b i $\mathcal{R}(A)$, noe som er en betingelse ekvivalent med at x er en MK løsning.

I vårt tilfelle blir (det lønner seg i utregningen å regne fra høyre mot venstre, fordi matrise-vektorprodukter er mindre arbeid enn fulle matriseprodukter)

$$x = Q_2\Sigma^+Q_1^{\mathrm{T}}b = \frac{1}{3\sqrt{2}}Q_2\begin{bmatrix}1/4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 4\\ *\\ *\end{bmatrix} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\ 8\end{bmatrix} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix}17\\ 1\end{bmatrix}$$

Oppgave 3

a Setter vi $u_k = v_k + (I - A)^{-1}a$ (som går an fordi $I - A$ er ikkesingulær) får vi etter litt forenkling $v_{k+1} = Av_k$. Vi vet at den generelle løsningen av denne ligningen er $v_k = A^k v_0$, og dermed er $u_k = A^k v_0 + (I-A)^{-1}a = A^k(u_0 - (I-A)^{-1}a) + (I-A)^{-1}a = A^k u_0 + (I-A)^{-1}(I - A^k)a$.

b N^j blir matrisen med enere på j-te diagonal over hoveddiagonalen, og nuller ellers. Spesielt blir $N^n = 0$. Dermed gir binomialformelen, for $k \geq n$,

$$J^k = \sum_{j=0}^{n} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j$$

og alt vi trenger vite er at dette er en endelig sum, der antall ledd n er uforandret når $k \to \infty$, og at j-te ledd går mot 0 fordi $\binom{k}{j}\lambda^{k-j} \to 0$ når $k \to \infty$ og j er fast siden $|\lambda| < 1$.

c Teoremet om stabilitet sier at alle løsninger av ligningen $u_{k+1} = Au_k$ går mot null når $k \to \infty$ hvis og bare hvis alle egenverdiene til A har absoluttverdi mindre enn 1. Siden enhver matrise A har en Jordan-form med blokker på samme form som i punkt b, er det nok å vise teoremet for slike blokker. Siden den generelle løsningen er $u_k = A^k u_0$ følger det fra punkt b at $u_k \to 0$ når $k \to \infty$.

Oppgave 4

Vi gjør rekkeoperasjoner på matrisen for å eliminere alle enere i første søyle under første rad. Dette endre ikke determinanten. Men da står vi igjen med en matrise på samme form, i nedre høyre $(n-1) \times (n-1)$-hjørne, og gjentar vi prosessen ender vi opp med en øvre triangulær matrise med bare enere på diagonalen og over. Determinanten blir derfor 1.

Oppgave 5

Vi splitter summen for e^A opp i en sum for like k og en for de odde, og bruker at $A^{2k} = (-\alpha^2)^k I = (-1)^k \alpha^{2k} I$, og den identiteten multiplisert med A gir $A^{2k+1} = (-1)^k \alpha^{2k} A$:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{2k}}{(2k)!} I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{2k}}{(2k+1)!} A = (\cos\alpha) I + \frac{\sin\alpha}{\alpha} A.$$

Vi har ikke brukt antisymmetrien til A her. Men vi kan vite at e^A blir ortogonal om vi bruker antisymmetrien, for $(e^A)^T = e^{A^{\mathrm{T}}} = e^{-A} = (e^A)^{-1}$. Vi sjekker dette direkte slik:

$$\begin{aligned}
(e^A)^{\mathrm{T}} e^A &= \Big((\cos\alpha)I + \frac{\sin\alpha}{\alpha}A^{\mathrm{T}}\Big)\Big((\cos\alpha)I + \frac{\sin\alpha}{\alpha}A\Big) \\
&= \Big((\cos\alpha)I - \frac{\sin\alpha}{\alpha}A\Big)\Big((\cos\alpha)I + \frac{\sin\alpha}{\alpha}A\Big) \\
&= (\cos^2\alpha)I - \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}A^2 = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)I = I.
\end{aligned}$$