NTH
UNIVERSITETET I TRONDHEIM
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:

EKSAMEN I FAG 75032 MATRISEMETODER

Tirsdag 15. august 1995
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator.
Ingen trykte og skrevne hjelpemidler.

Oppgave 1

a) Bestem nullrommet til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 8 & -7 & 2 \\ 17 & -16 & 5 \end{bmatrix}.$$

Kall søylene i A a_1, a_2 og a_3. Forklar hvorfor a_1 og a_2 danner en basis for søylerommet til A, og uttrykk a_3 som en lineærkombinasjon av a_1 og a_2.

b) Uttrykk Aa_1 og Aa_2 som en lineærkombinasjon av a_1 og a_2. Avbildningen $\mathcal{R}(A) \to \mathcal{R}(A)$ som avbilder x til Ax kan uttrykkes ved en 2×2-matrise B i basisen a_1, a_2. Skriv opp matrisen B.

c) Det viser seg at $A^3 + A = 0$ (du behøver ikke vise dette). Finn egenverdiene til A.

Oppgave 2

a) I en singulærverdidekomposisjon $A = Q_1 \Sigma Q_2^{\mathrm{T}}$ for matrisen

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \\ 3 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

finn Q_2, Σ og de to første søylene i Q_1. Hvorfor er det mindre interessant å kjenne de to siste søylene i Q_1?

b) Finn en minste kvadraters løsning til ligningen $Ax = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^{\mathrm{T}}$ og forklar kort hvorfor metoden du valgte er korrekt.

Oppgave 3

a) La A være en kvadratisk matrise som ikke har 1 blant sine egenverdier. Anta at u_0, $u_1, \ldots$ er en følge av vektorer som oppfyller

$$u_{k+1} = Au_k + a.$$

Finn u_k uttrykt ved A, a, k og u_0. (Hint: sett $u_k = v_k + (I - A)^{-1}a$ og løs for v_k.)

b) (Om du løser dette punktet kun for $n = 4$ regnes punktet som 80% besvart.)
La J være $n \times n$-matrisen

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Vis at $J^k \to 0$ når $k \to \infty$ hvis, og bare hvis, $|\lambda| < 1$. (Hint: I binomialformelen $(a+b)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j$ kan tallene a og b erstattes med matriser A og B dersom $AB = BA$. Skriv $J = \lambda I + N$ og finn N^j først.)

c) Hva sier setningen om stabilitet for rekursjonsformelen $u_{k+1} = Au_k$? I boken er denne setningen vist bare for diagonaliserbare matriser A. Forklar kort hvordan resultatet fra punkt **b)** kan brukes til å generalisere setningen til vilkårlige kvadratiske matriser.

Oppgave 4 Beregn determinanten til $n \times n$-matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

med (i,j)-element $\min(i,j)$.

Oppgave 5 Anta A er en $n \times n$-matrise slik at $A^{\mathrm{T}} = -A$ og $A^2 = -\alpha^2 I$ der α er et reelt tall. Finn et uttrykk for e^A. Du kan få bruk for potensrekkene

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \cos x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!}, \quad \sin x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!}.$$

Forklar hvordan du kunne vite at e^A er ortogonal før du regnet den ut, og verifiser dette direkte.