NTH
UNIVERSITETET I TRONDHEIM
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen 73 59 35 25

EKSAMEN I FAG 75032 MATRISEMETODER

Fredag 26. mai 1995
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator.
Ingen trykte og skrevne hjelpemidler.

Oppgave 1

a) Bestem en LU-dekomposisjon for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

og løs ligningen $Ax = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

b) Finn determinanten til A, og vis at matrisen er positivt definit.

Oppgave 2

a) En 4×4-matrise A har trappedekomposisjon $A = LU$, der

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finn en basis for nullrommet $\mathcal{N}(A)$ og en for rekkerommet $\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})$ til A.

b) Matrisen A oppfyller i tillegg $A^2 = 0$. Finn en basis for henholdsvis søylerommet $\mathcal{R}(A)$ og venstre nullrom $\mathcal{N}(A^{\mathrm{T}})$ til A.

c) Hva kan du si om Jordanformen til A?

Oppgave 3

a) Finn en singulærverdidekomposisjon for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 10 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

($A^{\mathrm{T}}A$ har egenverdiene 225 og 50. Faktoriseringene $63 = 7 \cdot 9$, $84 = 7 \cdot 12$ og $112 = 7 \cdot 16$ kan være nyttige).

b) Finn en minste kvadraters løsning til $Ax = b$ der $b = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Oppgave 4

a) Beregn LU-dekomposisjonen til $n \times n$-matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ -1 & 2 & -2 & 2 & \dots \\ 1 & -2 & 3 & -3 & \dots \\ -1 & 2 & -3 & 4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

med (i,j)-element $(-1)^{i+j}\min(i,j)$.

b) Finn den inverse til matrisen ovenfor.

Oppgave 5 La r være et reelt tall og beregn determinanten til $n \times n$-matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} \\ r & 1 & r & \dots & r^{n-2} \\ r^2 & r & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^{n-1} & r^{n-2} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

med (i,j)-element $r^{|i-j|}$. For hvilke r er matrisen positivt definit?