75032 Matrisemetoder 1996–08–13: Løsningsforslag

Oppgave 1

a Gausseliminasjon uten pivotering går greit, og som alltid samler vi opp koeffisientene som brukes underveis i L:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a+2 & a+3 \\ 0 & a & 2a+1 & 4a \\ 1 & 1 & a+1 & a^2+1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & a & 2a+1 & 4a \\ 0 & 0 & a & a^2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & a^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at U, og dermed A, har rang 3 og derfor er singulær.

b Vi løser $Ux = 0$ ved tilbakesubstitusjon. Det er én fri variabel x_4, som vi setter lik 1, og tilbakesubstitusjon gir da

$$\begin{aligned} x_3 + ax_4 = 0 &\Rightarrow x_3 = -a, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 &\Rightarrow x_2 = -2(-a) - 3 = 2a - 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 &\Rightarrow x_1 = -a + 2. \end{aligned}$$

En basis for $\mathscr{N}(A)$ består altså av den ene vektoren $\begin{bmatrix} -a+2 & 2a-3 & -a & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

$\mathscr{R}(A)$ har en basis bestående av de første 3 søylene i A, siden de tilsvarende søylene i U inneholder pivoter.

c Vi har $Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow Ux = y$ der $Ly = b$. Vi løser altså $Ly = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ ved framoversubstitusjon:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1; \\ ay_1 + y_2 = 1 &\Rightarrow y_2 = 1 - a; \\ ay_2 + y_3 = 1 &\Rightarrow y_3 = 1 - a(1-a) = a^2 - a + 1; \\ y_1 + ay_3 + y_4 = 1 &\Rightarrow y_4 = 1 - y_1 - ay_3 = -a(a^2 - a + 1). \end{aligned}$$

Men $Ux = y$ har en løsning hvis og bare hvis $y_4 = 0$, det vil si dersom $a = 0$ eller $a^2 - a + 1 = 0$; altså

$$a = 0 \text{ eller } a = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Oppgave 2

a Søyle j i produktet $A = QR$ er $Q \cdot$(søyle j i R), det vil si $a_j = Q \begin{bmatrix} r_{1j} & \cdots & r_{jj} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ hvor vi har utnyttet at R er øvre triangulær. Men Qx er en lineærkombinasjon av søylene i Q: $Qx = \sum_{i=1}^{n} x_i q_i$. I dette tilfellet gir det $a_j = \sum_{i=1}^{j} r_{ij} q_i$.

Vi skal ha $q_i^{\mathrm{T}} q_j = 0$ for $i \neq j$ og $q_i^{\mathrm{T}} q_i = 1$ (ortonormalitet).

b For $j = 1$ gir formelen $a_1 = r_{11} q_1$. Kravet $q_1^{\mathrm{T}} q_1 = 1$ leder til $r_{11}^2 = a_1^{\mathrm{T}} a_1$. Krever vi $r_{11} > 0$ (som er vanlig) blir da $r_1 = \|a_1\|$, og $q_1 = a_1 / \|a_1\|$.

Ved å multiplisere ligningen fra **a)** med q_k^{T} på venstre side, får vi

$$q_k^{\mathrm{T}} a_j = \sum_{i=1}^{j} r_{ij} q_k^{\mathrm{T}} q_i = r_{kj} \tag{1}$$

fordi vektorene q_i er ortonormale. Med $k = 1$ kan vi dermed regne ut $r_{1j} = q_1^{\mathrm{T}} a_j$ for $j = 2, \ldots, n$.

Generelt finner vi ved å omorganisere ligningen fra **a)**:

$$r_{jj} q_j = a_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} q_i \tag{2}$$

hvor alt på høyresiden er kjent når vi kommer så langt. Som før ledes vi til at r_{jj} blir normen av vektoren på høyresiden av (2), mens q_j blir vektoren delt med r_{jj}. Deretter bruker vi (1) med $k = j$ for å finne $r_{j,j+1}, \ldots, r_{j,n}$, og dermed har vi alle data som trengs for å øke j med 1 og starte fra (2) igjen.

Dette er faktisk akkurat de samme utregningene som ved Gram-Schmidt ortogonalisering, bare med en liten forskjell i organiseringen: Alle indreproduktene $q_k^{\mathrm{T}} a_j = r_{kj}$ regnes ut så snart det er mulig, istedet for at man venter til man trenger verdiene for å finne neste ortogonale vektor. Setter vi nemlig inn $r_{ij} = q_i^{\mathrm{T}} a_j$ (fra (1)) i (2) finner vi jo

$$r_{jj} q_j = a_j - \sum_{i=1}^{j-1} (q_i^{\mathrm{T}} a_j) q_i \tag{3}$$

som er velkjent fra Gram-Schmidt.

c Vi bruker algoritmen fra forrige punkt og finner, i tur og orden (men hopper over noen detaljer): $a_1^{\mathrm{T}} a_1 = 4$, $r_{11} = 2$, $q_1 = {}^1\!/_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Deretter $r_{12} = q_1^{\mathrm{T}} a_2 = 2u$, $r_{13} = q_1^{\mathrm{T}} a_3 = 0$. I neste runde blir (ved (2)) $r_{22} q_2 = a_2 - r_{12} q_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ hvorav $r_{22} = 4$ og $q_2 = {}^1\!/_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Dernest finner vi $r_{23} = q_2^{\mathrm{T}} a_3 = 2v$, og til slutt $r_{33} q_3 = a_3 -$

$r_{13}q_1 - r_{23}q_2 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ som gir $r_{33} = 2$ og $q_3 = {}^1\!/_2 \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Oppsummert:

$$A = QR = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2u & 0 \\ 0 & 4 & 2v \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

d Normalligningen $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$ med $A = QR$ forenkles til $Rx = Q^{\mathrm{T}}b = \begin{bmatrix}4 & 4 & 4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ som løses ved tilbakesubstitusjon:

$$\begin{aligned} 2x_3 = 4 &\Rightarrow x_3 = 2; \\ 4x_2 + 2vx_3 = 4 &\Rightarrow x_2 = 1 - {}^1\!/_2 v x_2 = 1 - v; \\ 2x_1 + 2ux_2 = 4 &\Rightarrow x_1 = 2 - ux_2 = 2 - u + uv \end{aligned}$$

og dermed

$$x = \begin{bmatrix} 2 - u + uv \\ 1 - v \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 3

Fordi matrisen er symmetrisk må den tredje egenvektoren stå ortogonalt på de to første, og er altså parallell med $\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Da kan vi skrive egenverdiligningen som $AQ = Q\Lambda$ der den ortogonale matrisen har de normaliserte egenvektorene som søyler og diagonalmatrisen Λ har egenverdiene på diagonalen:

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Dermed får vi

$$A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\lambda}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\lambda}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\lambda}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\lambda}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\lambda}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\lambda}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\lambda}{3} \end{bmatrix}$$

(merk at siden matrisen er symmetrisk, trenger vi bare regne ut seks av de ni matriseelementene).

Oppgave 4

a Vi trekker første rekke fra hver av de øvrige, og utvikler etter siste søyle:

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1+d_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -d_1 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -d_1 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_1 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} \\
&= d_n \begin{vmatrix} 1+d_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -d_1 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_1 & 0 & \cdots & d_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} -d_1 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -d_1 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ -d_1 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} \\ -d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
&= d_n D_{n-1} + (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}(-d_1) \begin{vmatrix} d_2 & 0 & & 0 \\ 0 & d_3 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= d_n D_{n-1} + d_1 \cdots d_{n-1}
\end{aligned}
$$

og fra dette kan den ønskede formelen lett vises ved induksjon. Vi kan også «oppdage» den: Med $p_n = d_1 \cdots d_n$ finner vi

$$\frac{D_n}{p_n} = \frac{D_{n-1}}{p_{n-1}} + \frac{1}{d_n}$$

For $n = 2$ blir $D_2 = (1 + d_1)(1 + d_2) - 1 = d_1 d_2 + d_1 + d_2$ som gir $D_2/p_2 = 1 + 1/d_1 + 1/d_2$. Fra formelen over følger dermed umiddelbart at

$$\frac{D_n}{p_n} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k}.$$

b A_n er positivt definit fordi den er symmetrisk og alle dens øvre venstre $k \times k$ underdeterminanter, nemlig D_k for $k = 1, \ldots, n$, er positive.