Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Finn Knudsen 73 59 35 23

EKSAMEN I FAG 75032 MATRISEMETODER

Tirsdag 13. august 1996
Tid: 09:00–14:00

Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTH tillatt
Ingen trykte og skrevne hjelpemidler tillatt

Oppgave 1

a) Finn en trappedekomposisjon $A = LU$ for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a+2 & a+3 \\ 0 & a & 2a+1 & 4a \\ 1 & 1 & a+1 & a^2+1 \end{bmatrix}$$

der a er et komplekst tall. Vis at A er singulær for alle a.

b) Finn en basis for nullrommet og en for søylerommet til A.

c) For hvilke verdier av a har $Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ minst en løsning?

Oppgave 2 I en QR–dekomposisjon for en matrise A, la søylene i Q være $q_1, \dots, q_n$ og søylene i A være $a_1, \dots, a_n$. La også matrise-elementene i R være r_{ij}.

a) Forklar hvorfor formelen

$$a_j = \sum_{i=1}^{j} r_{ij} q_i$$

holder. Hvilke betingelser gjelder for vektorene $q_1, \dots, q_n$?

b) Forklar hvordan formelen over kan benyttes til å beregne dataene i Q og R i rekkefølgen

$$q_1, r_{11}, \dots, r_{1n}, q_2, r_{22}, \dots, r_{2n}, q_3, r_{33}, \dots$$

Er det noen vesensforskjell på denne fremgangsmåten og vanlig Gram-Schmidt ortogonalisering? (*Hint*: Det kan lønne seg å multiplisere formelen ovenfor fra venstre med q_k^{T}.)

c) Beregn QR–dekomposisjonen til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & u+2 & v+1 \\ 1 & u-2 & -v+1 \\ -1 & -u+2 & v+1 \\ -1 & -u-2 & -v+1 \end{bmatrix}$$

der u, v er reelle tall.

d) Finn en minste kvadraters løsning til $Ax = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Oppgave 3 Finn alle symmetriske 3×3–matriser som har de to egenvektorene $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ (med egenverdi $\sqrt{3}$) og $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ (med egenverdi $\sqrt{2}$).

Oppgave 4 La $d_k > 0$ for $k \geq 1$, og sett

$$A_n = \begin{bmatrix} 1+d_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+d_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+d_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+d_n \end{bmatrix} \qquad (n \geq 2).$$

a) La $D_n = \det A_n$, og vis at $D_n = d_1 d_2 \cdots d_n \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k}\right)$.

b) Vis at A_n er positivt definit.