75032 Matrisemetoder 1996–06–06: Løsningsforslag

Oppgave 1

a Vanlig Gausseliminasjon:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ s & 2-s & s & -s+1 \\ 0 & 2s & s & s+1 \\ 1 & -3 & 2s+1 & s \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2s & s & s+1 \\ 0 & -2 & 2s & s+1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & s & 1 \\ 0 & 0 & 2s & s+2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} = U,$$

slik at $A = LU$ med

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}.$$

(Som vanlig noteres koeffisientene som brukes i Gausseliminasjonen under prosessen fra A til U etterhvert i L.) Vi merker oss at pivotelementet i siste runde er s, som etter teorien ikke skal aksepteres dersom $s = 0$. Men i dette tilfellet er også plassen rett under $(2s)$ lik null, så rekkeoperasjonen er likevel gyldig. Enten $s \neq 0$ eller ikke har U fått gyldig trappeform.

Om $s \neq 0$ er $\operatorname{rang}(A) = 4$, for $s = 0$ er $\operatorname{rang}(A) = 3$.

b $Ax = b$ har *alltid* en løsning når $s \neq 0$, siden A er ikkesingulær i dette tilfellet. For $s = 0$ må saken undersøkes spesielt. For eksempel kan vi skrive

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow Ux = y \text{ der } Ly = b$$

$Ly = b$ kan vi løse ved fremoversubstitusjon, og få $y = \begin{bmatrix} t & 1 & t & 3-3t \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ (NB forutsatt $s = 0$). $Ux = y$ kan løses mhp x hvis og bare hvis $y_4 = 0$, det vil si dersom $3 - 3t = 0$.

$Ax = b$ har altså en løsning dersom $s \neq 0$ eller $t = 1$, men ikke dersom $s = 0$ og $t \neq 1$.

c Rangen til $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ er aldri større enn 4 og alltid minst så stor som rangen til A; derfor er den alltid lik 4 når $s \neq 0$. Når $s = 0$ er $\operatorname{rang}(A) = 3$, så $\operatorname{rang}(\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix})$ er enten 3 (om $b \in \mathscr{R}(A)$ eller 4 (om $b \notin \mathscr{R}(A)$). Siden $b \in \mathscr{R}(A)$ hvis og bare hvis $Ax = b$ har en løsning, er saken klar:

Rangen til $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ er 4 for alle s og t unntatt for $s = 0$ og $t = 1$, da rangen er 3.

Oppgave 2

(Det var en trykkfeil i oppgaven: Singulærverdidekomposisjonen skal være $Q_1 \Sigma Q_2^{\mathrm{T}}$, ikke $Q_1 \Sigma Q_2$.)

Vi regner ut

$$A^{\mathrm{T}} A = \begin{bmatrix} 5/2 & 1/2 \\ 1/2 & 5/2 \end{bmatrix}$$

som har egenverdier og normaliserte egenvektorer:

$$\lambda_1 = 3, \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = 2, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vi har dermed

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Av $AQ_2 = Q_1 \Sigma$ finner vi de to første søylene i Q_1: De må være henholdsvis $3^{-1/2} A u_1$ og $2^{-1/2} A u_2$. De to siste søylene velges slik at Q_1 blir ortogonal, for eksempel

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Andre mulige svar: Om de to singulærverdiene $\sqrt{3}$ og $\sqrt{2}$ byttes om må de to første søylene i Q_1 og Q_2 byttes om. Hver av disse søylene er bestemt bare modulo et fortegn (men snur man fortegnet på en av søylene i Q_2 skal fortegnet på tilsvarende søyle i Q_1 også snus), og de to siste søylene i Q_1 er bare bestemt av at Q_1 skal være ortogonal.)

Oppgave 5a (fortsatt fra side 4)[1]: En interessant variant (fra en smart elektrostudent) benytter følgende identitet, som nesten umiddelbart gir det ønskede resultat:

$$\begin{bmatrix} -\lambda I & A \\ B & -\lambda I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I & 0 \\ B & \lambda I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB - \lambda^2 I & \lambda A \\ 0 & -\lambda^2 I \end{bmatrix}$$

hvorav $\lambda^{m+n} \det(C - \lambda I) = \lambda^{2n} \det(AB - \lambda^2 I)$.

[1]Kommer her for å beholde en rimelig bra layout uten å gå utover 4 sider (en dårlig grunn kanskje, men likefullt en grunn).

Oppgave 3

a Kall søylene i A u_1, u_2 og u_3. Vi ortonormaliserer ved Gram-Schmidt:

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{2}u_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}; \quad u_1 = 2v_1$$

$$v_2' = u_2 - (u_2^{\mathrm{T}}v_1)v_1 = u_2 + 2v_1; \quad v_2 = \frac{1}{4}v_2' = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}; \quad u_2 = -2v_1 + 4v_2$$

$$v_3' = u_3 - (u_3^{\mathrm{T}}v_1)v_1 - (u_3^{\mathrm{T}}v_2)v_2 = u_3 + 2v_1; \quad v_3 = \frac{1}{2}v_3' = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}; \quad u_3 = -2v_2 + 2v_3$$

som leder til

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & -1\\1 & -1 & 1\\1 & 1 & -1\end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\0 & 4 & -2\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

(søylene i Q er v_1, v_2 og v_3, og R er satt sammen av koeffisientene i formlene ovenfor som uttrykker u_1, u_2 og u_3 ved v_1, v_2 og v_3.)

b Normalligningene $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$ leder til

$$Rx = Q^{\mathrm{T}}b = \begin{bmatrix}5\\0\\1\end{bmatrix} \text{ og dermed } x = \begin{bmatrix}9/4\\-1/4\\-1/2\end{bmatrix}$$

ved tilbakesubstitusjon.

c $\mathscr{N}(A^{\mathrm{T}}) = \mathscr{N}(R^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}) = \mathscr{N}(Q^{\mathrm{T}})$ siden R er invertibel. Q har tre ortonormale søyler i $\mathbb{R}^4$, så rangen er 3, og $\mathscr{N}(Q^{\mathrm{T}}) = \mathscr{R}(Q)^{\perp}$ er endimensjonalt. Det er altså nok å finne én vektor i $\mathscr{R}(Q)^{\perp}$ og ortogonalisere denne, og det kan gjøres uten videre regning i dette tilfellet: En ortonormal basis for $\mathscr{N}(A^{\mathrm{T}})$ består av den ene vektoren

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}.$$

Oppgave 4

Vi utvikler determinanten (som vi kaller D_n) etter siste rekke, og får umiddelbart rekursjonsformelen

$$D_n = b_n \prod_{k=1}^{n-1} a_k + D_{n-1}$$

som er lett å løse. Vi trenger en startbetingelse: En granskning av spesialtilfellet $n = 2$ viser at formelen over også stemmer i dette tilfellet dersom vi setter $D_1 = b_1$, og da stemmer den til og med for $n = 1$ om vi setter $D_0 = 0$.[2] Vi ender med

$$D_n = \sum_{m=1}^{n} (D_m - D_{m-1}) = \sum_{m=1}^{n} b_m \prod_{k=1}^{m-1} a_k.$$

Man kan også komme forholdsvis direkte til denne formelen ved å utvikle etter siste søyle.

Oppgave 5

a For $x \in \mathbb{C}^m$ og $y \in \mathbb{C}^n$ setter vi

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n} \text{ hvorav } Cz = \lambda z \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} Ay = \lambda x \\ Bx = \lambda y \end{Bmatrix}$$

Spesielt, om $Cz = \lambda z$ finner vi $ABx = \lambda Ay = \lambda^2 x$. Om $z \neq 0$ er $x \neq 0$, for ellers blir $y = \lambda^{-1} Bx = 0$ (her bruker vi $\lambda \neq 0$). Altså er λ^2 en egenverdi for AB dersom λ er en egenverdi for C.

Omvendt, om $ABx = \lambda^2 x$ setter vi $y = \lambda^{-1} Bx$, så er $Ay = \lambda^{-1} ABx = \lambda x$ og (selvsagt) $Bx = \lambda y$. Dermed er $Cz = \lambda z$, og den omvendte implikasjonen er vist.

(Se også nederst side 2).

b La $\dot{y} = z$, så vil $w = \left[\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix}\right]$ oppfylle $\dot{w} = Cw$ der $C = \left[\begin{smallmatrix} 0 & I \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

Teorien for førsteordens systemer forteller oss at noen løsninger er ubegrenset når $t \to \infty$ dersom C har noen egenverdier med realdel > 0. Men i følge punkt **a** er egenverdiene til C alle kvadratrøtter til B's egenverdier (og muligens 0 i tillegg). Ethvert komplekst tall $\lambda \neq 0$ har to kvadratrøtter, som er like men med motsatt fortegn. For at ingen av dem skal ha positiv realdel må da begge ha realdel 0, det vil si kvadratrøttene må være imaginære, og λ må derfor være reell og $\lambda \leq 0$. Dette gjelder alle B's egenverdier, som påpekt.

Omvendt, om B har n distinkte egenverdier $\lambda_k < 0$, har C i alt $2n$ distinkte, imaginære egenverdier $\pm i\sqrt{-\lambda_k}$, og den generelle løsningen av $\dot{w} = Cw$ er en lineærkombinasjon av løsninger på formen $e^{\pm i\sqrt{-\lambda_k}t} w_k$, som alle er begrenset for alle t.

[2] $\prod_{k=1}^{0} a_k = 1$ ifølge vanlige konvensjoner.