**Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag**

Faglig kontakt under eksamen:
Finn Knudsen 73 59 35 23

EKSAMEN I FAG 75032 MATRISEMETODER

Torsdag 6. juni 1996
Tid: 09:00–14:00

Typegodkjent kalkulator med tomt minne tillatt.
Ingen trykte og skrevne hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1 La s og t være reelle tall, og la

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ s & 2-s & s & -s+1 \\ 0 & 2s & s & s+1 \\ 1 & -3 & 2s+1 & s \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ t \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en LU-dekomposisjon til A, og bestem rangen til A for alle s.

b) For hvilke reelle tall s og t har ligningssystemet $Ax = b$ en løsning?

c) Bestem rangen til 4×5–matrisen $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ for alle reelle tall s og t.

Oppgave 2 Bestem en singulærverdidekomposisjon $A = Q_1 \Sigma Q_2$ for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

(De to siste søylene i Q_1 teller bare 10% i oppgaven, så de kan du hoppe over om du har knapt med tid).

Oppgave 3 Det er gitt en matrise A og en vektor b:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en QR-dekomposisjon for A.

b) Finn en minste kvadraters løsning til $Ax = b$.

c) Finn en ortonormal basis for $\mathscr{N}(A^{\mathrm{T}})$.

Oppgave 4 Bestem determinanten til $n \times n$–matrisen

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & & b_1 \\ -1 & a_2 & & & b_2 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & -1 & b_n \end{bmatrix}$$

(der alle matriseelementer er 0 med unntak av siste søyle, hoveddiagonalen og diagonalen umiddelbart under hoveddiagonalen).

Oppgave 5

a) La A være en $m \times n$–matrise, B en $n \times m$–matrise, og betrakt $(m+n) \times (m+n)$–matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

Vis at et komplekst tall $\lambda \neq 0$ er en egenverdi for C hvis og bare hvis λ^2 er en egenverdi for AB.

b) La B være en $n \times n$–matrise og betrakt systemet $\ddot{y} = By$ av 2. ordens differensialligninger. For at enhver løsning av systemet skal være begrenset, er det nødvendig at alle B's egenverdier er reelle og ≤ 0. Vis dette. Vis også at betingelsen er tilstrekkelig dersom B har n distinkte egenverdier $\neq 0$. *Hint: Finn et ekvivalent system av 1. ordens differensialligninger.*