Størrelser, enheter, dimensjonsløse størrelser

Harald Hanche-Olsen

26. august 2003

Sammendrag

Dimensjonsanalysen krever åpenbart at man har riktige enheter! Dette dokumentet er laget som en hjelp for å finne riktige enheter på en del vanlig forekommende størrelser.

Dette er et uferdig dokument. Jeg vil modifisere og legge til biter etter som det måtte trengs utover semesteret.

1 Noen størrelser og deres enheter

Elastisitetsmoduler. Spenninger i materialer måles i Pascal: $\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2} = \mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}}$. (Et *trykk* er et spesialtilfelle av en spenning, der kraften alltid virker normalt på flaten den virker over og er like stor uansett retning.) Dersom vi bruker a om posisjonen til et punkt i materialet når det ikke er deformert og $x(a)$ om posisjonen når det deformeres, så vil $dx/da - 1$ være et mål for deformasjonen (engelsk: *strain*). Spenningen i materialet er proporsjonalt med deformasjonen, og proporsjonalitetskonstanten kalles *Youngs elastisitetsmodul*. Siden deformasjonen er dimensjonsløs får elastisitetsmodulen E samme dimensjon som spenningen, altså Pascal. (I realistiske anvendelser er a og x vektorer, så dx/da skal erstattes med en tensor. Men prinsippet er det samme, og enhetene forandres ikke av dette.)

Viskositet. Viskositeten til et fluid defineres kanskje enklest ut fra Navier–Stokes-ligningen, som for et inkompressibelt fluid er

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mu\Delta\mathbf{u} - \nabla p, \qquad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{u}\cdot\nabla$$

Her er $\Delta = \nabla^2$ Laplaceoperatoren, $\mathbf{u}$ hastighetsfeltet til fluidet, ρ er tettheten, og μ er fluidets *dynamiske viskositet*. Av og til (og spesielt når tettheten er konstant) dividerer man heller med ρ og skriver i stedet

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nu\Delta\mathbf{u} - \nabla\frac{p}{\rho}, \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Her kalles ν *kinematisk viskositet*. Det er ganske klart fra ligningen at $[\nu] = \mathrm{m^2s^{-1}}$. Likeledes blir $[\mu] = [\rho\nu] = \mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}}$.

En annen forklaring: Tenk deg to parallelle plater med en kort avstand d mellom dem. Den ene platen holdes i ro mens den andre beveges i sin lengderetning med en hastighet v. Mellomrommet fylles med en væske. Så lenge væskestrømmen er laminær, vil vi finne en hastighetsgradient v/d i væsken. Det virker da en kraft per flateenhet på hver plate lik $\mu v/d$. Siden $[d/v] = \mathrm{s}$ blir $[\mu] = \mathrm{N\,m^{-2}s} = \mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}}$.

Diffusjonskoeffisienter. En diffusjonskoeffisient er konstanten κ i en ligning på formen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\Delta u + \cdots$$

Åpenbart vil diffusjonskoeffisienter ha dimensjon $\mathrm{m^2s^{-1}}$. Kinematisk viskositet er ett eksempel. Diffusjon over en tidsskala T vil virke over en lengdeskala $L = \sqrt{\kappa T}$, og (ekvivalent) diffusjon trenger en tid av størrelsesorden L^2/κ for å virke over en avstand L.

Varmeledningsevne. Varmefluks (måles i $\mathrm{W/m^2}$) er typisk proporsjonal med temperaturgradienten (K/m), og varmeledningsevnen er proporsjonalitetskonstanten. Den måles altså i $\mathrm{W\,m^{-1}K^{-1}} = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}K^{-1}}$.

Overflatespenning. En overflatespenning $[\sigma]$ har en direkte tolkning som energi per flateenhet, altså $[\sigma] = \mathrm{J/m^2} = \mathrm{kg\,s^{-2}}$. Dette er energien som er lagret i grensesnittet mellom (for eksempel) vann og luft. Energiminimering gir at en eventuell krumning av grenseflaten mellom vann og luft må følges av en trykkforskjell som er lik produktet av krumningen og overflatespenningen. Altså $\sigma = r\Delta p$ der r er krumningsradien. Dermed blir $[\sigma] = \mathrm{m}\cdot\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m} = \mathrm{kg\,s^{-2}}$. Dette er samme resultat som om overflaten var en virkelig fysisk membran med en konstant spenning σ (som måles i N/m, siden membranen er todimensjonal, og ethvert snitt i membranet blir endimensjonalt – betrakt kraft per lengdeenhet over et slikt snitt.)

2 Dimensjonsløse størrelser

Dimensjonsløse størrelser dukker opp i nær sagt alle slags situasjoner. Svært mange har fått egne navn. Kanskje mest kjent er *Machtallet*, som er forholdet mellom hastigheten til et legeme og lydhastigheten i mediet det beveger seg i. I relativitetsteorien har du sikkert støtt på *Lorenztallet*, i blant kjent som *Einsteintallet* – selv om du kanskje ikke har hørt noen av disse navnene på tallet før: Det er forholdet mellom en hastighet og lyshastigheten.

Finstrukturkonstanten står i en særstilling som den eneste dimensjonsløse kombinasjonen av fundamentale fysiske konstanter:

$$\alpha = \frac{e^2}{2hc\epsilon_0} \approx \frac{1}{137}.$$

(Andre kombinasjoner, som $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$, stiller ikke i samme klasse fordi dette er sant så å si per definisjon.)

Bondtallet er ikke 007 som man skulle tro, men er definert som

$$\mathrm{Bo} = \frac{\Delta\rho\, d^2 g}{\sigma}$$

der $\Delta\rho$ er forskjellen mellom tettheten i en dråpe (eller boble) og fluidet som omgir den, d er diameteren, g er tyngdens akselerasjon og σ overflatespenningen. Bondtallet svarer til forholdet mellom netto tyngdekraft og kreftene fra overflatespenningen.

Poiseuilletallet for en partikkel med diameter d som beveger seg med hastighet v i et fluid er

$$\mathrm{Ps} = \frac{v\mu}{\Delta\rho\, gd^2}$$

og måler forholdet mellom viskøse krefter og tyngdens påvirkning.

I fluidmekanikken støter man ofte på *Reynoldstallet*

$$\mathrm{Re} = \frac{vL}{\nu}$$

der v er en typisk hastighet (for eksempel midlere væskehastighet i et rør), L en typisk lengde (for eksempel diameteren i røret) og ν er væskens kinematiske viskositet. Det svarer til forholdet mellom inertial-«krefter» og viskøse krefter.

Prandtl-tallet til et fluid er en ren egenskap ved fluidet:

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}$$

der ν er kinematisk viskositet og κ er termisk diffusjonskoeffisient.

Péclet-tallet er

$$\mathrm{Pe} = \frac{Lv}{\kappa} = \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Pr}}.$$

Det måler forholdet mellom transport av termisk energi ved konveksjon og varmeledning. Man kan helt analogt definere et Péclet-tall for massetransport, ved å erstatte termisk energi med et oppløst salt eller lignende og varmeledning med diffusjon.

Newtontallet til et legeme med størrelse L som beveger seg med hastighet v i et fluid med tetthet ρ er

$$\mathrm{Ne} = \frac{F}{\rho v^2 L}$$

der F er de hydrodynamiske friksjonskreftene som virker på legemet (engelsk: drag force).

Utvalget ovenfor var nokså tilfeldig. Det finnes over 300 andre navngitte dimensjonsløse størrelser. Med noen få unntak skal man dog ikke anta at navnene på disse er allment kjent, og muligheten for forvirring er absolutt til stede. For eksempel finnes minst fire forskjellige dimensjonsløse kombinasjoner som alle kalles *Stokes-tallet*. Kanskje kommer jeg til å liste opp noen flere av dem her i en senere utgave, dersom jeg tror vi får bruk for dem.