TMA4195 Matematisk modellering 2003

Øving 2

Veiledning: 2003–08–26

Oppgave 1: (Eksamen august 1996). En sprinters kapasitet er blant annet bestemt av den maksimale fraskyvningskraft hun er i stand til å produsere. Denne kraften kan skrives MP, der M er løperens masse og P den maksimale «akselerasjonen». I tillegg gir løperens «indre motstand» (akselerasjon og friksjon i armer og bein) når han beveger seg med hastighet u^* en motkraft, $MR(u^*)$, der funksjonen $R(u^*)$ oppfyller $R(0) = 0$ og antas å være lineær i u^* til første orden. Av dimensjonsgrunner får vi da $R(u^*) = u^*/\tau$, der τ er en karakteristisk tidskonstant. Målinger på ulike løpere, blant annet Ben Johnson og Carl Lewis, har gitt $P \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$ og $\tau \approx 1\,\mathrm{s}$, og vi vil bruke disse verdiene nedenfor.

(a) Gjør rede for at bevegelsesligningen til løperen i stille luft blir

$$M\frac{du^*}{dt^*} + M\frac{u^*}{\tau} + \tfrac{1}{2}\rho_{\text{luft}} C_D A u^{*2} = Mp^*(t^*)$$

og forklar kort hvordan uttrykket for luftmotstanden oppstår.

Benytt dimensjonsalanylse der A er løperens tverrsnitt i fartsretningen og $C_D = C_D(\mathrm{Re})$. $\mathrm{Re} = Lu^*/\nu$, der L er en typisk lengde og ν er luftas (kinematiske) viskositet.

(b) Finn et sett skalaer for u^*, t^* og p^* slik at ligningen på dimensjonsløs form blir

$$\dot{u}(t) + u(t) + \varepsilon u(t)^2 = p(t)$$

der

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\rho_{\text{luft}} C_D \frac{A}{M}\tau^2 P.$$

Har luftmotstanden stor betydning? ($C_d \approx 1$, $A \approx 0.45\,\mathrm{m}^2$, $\rho_{\text{luft}} \approx 1\,\mathrm{kg/m^3}$.)

(c) Beskriv kort hvordan en løser ligningen i (b) ved regulær perturbarsjon. I et sprintløp kan vi anta at løperen bruker maksimal kraft under hele distansen, dvs. $p^*(t^*) = P$. Bestem de to første leddene i en perturbasjonsutvikling for u i dette tilfellet. Hvor raskt når en løper opp til en tilnærmet konstant hastighet på en hundremeter?

Som kjent vil vind påvirke resultatene på en hundremeter. Hvis vinden blåser parallelt med løpsretningen, modifiseres uttrykket for luftmotstanden til

$$\tfrac{1}{2}\rho_{\text{luft}} C_D A (u^* - W)^2.$$

I tråd med skaleringen i (b) definerer vi $\delta = W/(\tau P)$.

(d) Finn, til orden ε, et uttrykk for den maksimale hastigheten som en sprinter er i stand til å holde som funksjon av δ

I et av heatene under kvalifiseringen til OL i 1988 satte Florence Griffith-Joyner verdensrekord på hundremeteren (10.49 s). I resten av løpene og under OL hadde hun tider omkring 10.7 s. Vindmåleren under rekordløpet registrerte 0 m/s, mens de fleste mente at det var en betydelig medvind (anslått til 4 m/s) og at måleren ikke fungerte.

(e) Diskutér denne påstanden.