TMA4195 Matematisk modellering 2003

Øving 3

Veiledning: 2003–09–02

Denne oppgaven er en berømt eksamensoppgave fra 1989 da prof. Ola Bratteli (nå ved UiO) hadde faget. Oppgaven leder til relativt kompliserte uttrykk, og kan sikkert med fordel løses ved hjelp av Maple. I denne teksten er det lagt inn noen ekstra tips underveis.

Metoden som brukes i punktene c–d kalles *Poincarés metode*. Jeg brukte samme metode i en forelesning for å drøfte pendelbevegelse.

Oppgave 1: (Eksamen 1989, lett omskrevet).
Den relativistiske ligningen for en planet som beveger seg rundt sola er (i dimensjonsløs form)

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 1 + \varepsilon u^2,$$

der $u = 1/r$, og der r og θ er polarkoordinater. Leddet εu^2 er en relativistisk korreksjon, $0 < \varepsilon \ll 1$.

(a) Vis at n-teordens leddet i perturbasjonsutviklingen

$$u = u_0(\theta) + \varepsilon u_1(\theta) + \varepsilon^2 u_2(\theta) + \cdots$$

tilfredsstiller en differensialligning på formen

$$\frac{d^2u_n}{d\theta^2} + u_n = f_n(u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}),$$

der f_0 er en konstant og f_n er en funksjon av n variable. Finn f_n for alle n.
(*Vink*: *Du skal altså ikke* løse *ligningene, bare* finne *dem*!)

(b) Anta startbetingelsene

$$u(0) = e + 1, \quad \frac{du}{d\theta}(0) = 0.$$

Her er e eksentrisiteten til den uperturberte banen. Med disse startbetingelsene svarer $\theta = 0$ til banens *perihel*, dvs. det punktet som er nærmest sola ($u = 1/r$ er maksimal). Finn u_0 og u_1 ved hjelp av regulær perturbasjon ved hjelp av resultatene fra punkt a).
(*Vink*: *Husk at ledd på høyresiden som også løser den homogene ligningen leder til spesielle løsninger, som* sekulære *ledd på formen $\theta\cos\theta$. Disse er ufysikalske fordi de vokser ubegrenset over tid.*)

(c) For å fjerne ufysikalske ledd vil vi også utvikle vinkelen i en perturbasjonsrekke. (Det er kanskje riktigere å si at det er omløpsperioden som utvikles). Før inn en ny vinkelvariabel

$$\varphi = (1 + \varepsilon h)\theta$$

og sett $v(\varphi) = u(\theta)$. Her er h en foreløpig ubestemt konstant. Transformér ligningen og startbetingelsene slik at de bare involverer v og φ. Vis at det finnes en verdi for h slik at v_0 og v_1 i den nye perturbasjonsutviklingen

$$v = v_0(\varphi) + \varepsilon v_1(\varphi) + \varepsilon^2 v_2(\varphi) + \cdots$$

er periodiske med periode 2π i φ, og finn v_0 og v_1.

(d) Bruk resultatet i c) til å vise at planetens perihel flytter seg forover med en vinkel $2\pi\varepsilon$ per omløp (til første orden i ε).