TMA4195 Matematisk modellering 2003

Øving 4

Veiledning: 2003–09–16

Oppgave 1: (Lin & Segel side 243, oppgave 12)
Finn tilnærmede løsninger til

$$36x^3 + (162 + 4\varepsilon)x^2 - 24\varepsilon x - 9\varepsilon = 0$$

som er gyldige når $|\varepsilon| \ll 1$. (Hint: Finn først en løsning på formen $x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots$. Det er to løsninger til, og de ligger begge nær 0. Prøv å balansere to ledd i ligningen.)

Oppgave 2: Finn indre, ytre og uniform tilnærming (til laveste orden) til løsningen av problemet

$$\varepsilon y'' + (1 + x^2)y' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Anta at ε er liten og positiv, og at det er et grensesjikt ved $x = 0$.

Oppgave 3: (Lin & Segel side 300, oppgave 7)
For en litt stiv streng med fastspente ender har vibrasjonsmodene en fasong $y(x)$ gitt ved egenverdiproblemet

$$\varepsilon y'''' - y'' = \lambda y, \qquad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0.$$

Her er ε et mål på stivhet, $0 < \varepsilon \ll 1$. Egenverdien λ er en dimensjonsløs vibrasjonsfrekvens. Finn ytre og indre tilnærminger anta at λ er $O(1)$, og konkluder at stivheten ikke har noen innvirkning på egenverdiene av lavest orden.

Oppgave 4: (Logan side 377, oppgave 2.1d)
Bestem likevektsløsningene til differensialligningen

$$\frac{du}{dt} = u^2(u^2 - 1)$$

og undersøk stabilitetsegenskapene til disse.

Oppgave 5: (Logan side 377, oppgave 2.2b)
Finn likevektsløsningene, og skissér et forgreningsdiagram, for differensialligningen

$$\frac{du}{dt} = u(9 - \mu u)(\mu + 2u - u^2).$$

Identifisér bifurkasjonspunktene og bifurkasjonsløsningene. Undersøk stabiliteten til likevektsløsningene og indikér hvor stabiliteten endres.