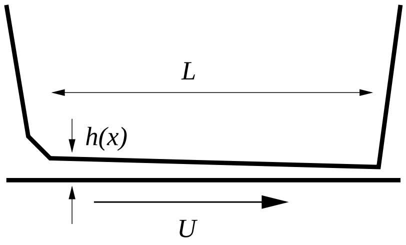
TMA4195 Matematisk modellering 2003

Øving 6

Veiledning: 2003–10–21



Oppgave 1: *Klassisk smøringsteori* beskjeftiger seg med strømning av en viskøs væske (smøreolje) i et tynt lag mellom to bevegelige deler. I figuren er den øverste delen stasjonær, mens den nederste beveger seg mot høyre med hastighet U. Vi antar lengden av mellomrommet i bevegelsesretningen er L, mens den variable tykkelsen er $h^*(x^*) \approx \varepsilon L$, hvor ε er en liten positiv konstant. Navier–Stokes-ligningene for stasjonær strømning av et inkompressibelt Newtonsk fluid i mellomrommet er

$$\begin{aligned} u^*\partial_{x^*}u^* + v^*\partial_{y^*}u^* &= -(\partial_{x^*}p^*)/\rho + \nu(\partial_{x^*x^*}u^* + \partial_{y^*y^*}u^*), \\ u^*\partial_{x^*}v^* + v^*\partial_{y^*}v^* &= -(\partial_{y^*}p^*)/\rho + \nu(\partial_{x^*x^*}v^* + \partial_{y^*y^*}v^*), \\ \partial_{x^*}u^* + \partial_{y^*}v^* &= 0 \end{aligned}$$

der jeg for korthets skyld har brukt notasjonen $\partial_{x^*}u^*$ for $\partial u^*/\partial x^*$ (en enda mer kompakt notasjon som ofte brukes, er $u^*_{x^*}$). u^* og v^* er hastighetskomponentene i strømningen, og ν er den kinematiske viskositeten til smøreoljen. Randbetingelsene er

$$u^* = U, v^* = 0 \text{ for } y^* = 0, \quad u^* = v^* = 0 \text{ for } y^* = h^*(x^*).$$

(a) Vi skal bruke følgende skaleringer:

$$x^* = Lx, \quad y^* = \varepsilon Ly, \quad u^* = Uu, \quad v^* = \varepsilon Uv.$$

Diskutér disse skaleringene. Virker de fornuftige? Det er mindre klart hvordan trykket skal skaleres, så vi setter $p^* = Pp$ der P er en ukjent trykkskala. Anta at trykkleddet som inneholder ∂_{x^*} balanserer det dominerende viskøse leddet i første ligning, og foreslå en verdi for P.

(b) Skriv opp det resulterende skalerte problemet. Det vil inneholde to dimensjonsløse parametre: ε og Reynoldstallet $\mathrm{Re} = \varepsilon LU/\nu$.

(c) Dersom Reynoldstallet blir for stort (i størrelsesorden 1000 eller over) kan strømningen bli turbulent. Estimér Re for en situasjon med $\varepsilon L \approx 10\,\mu\mathrm{m}$, $U \approx 10\,\mathrm{m/s}$. Typiske motoroljer har en viskositet som varierer i området fra $2\,\mathrm{cSt}$ til $150\,\mathrm{cSt}$, avhengig av temperatur og oljekvalitet. (Enheten er centiStokes, hvor $1\,\mathrm{St} = 1\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$.) I fortsettelsen skal vi regne med at strømningen ikke blir turbulent, slik at vi kan fortsette å regne med de stasjonære ligningene.

(d) Til laveste orden (ved å sette $\varepsilon = 0$ i ligningene) skal du nå finne

(1) $$\partial_x p = \partial_{yy}u, \quad \partial_y p = 0, \quad \partial_x u + \partial_y v = 0.$$

Vis at

(2) $$u = -\frac{1}{2}(\partial_x p)y(h-y) + \frac{h-y}{h}.$$

(*Hint*: Integrer den første ligningen i (1) to ganger i y-retning.) Vis også at $\int_0^{h(x)} \partial_x u = 0$ ved å integrere den tredje ligningen i (1) i y-retningen, sett inn u fra (2) og få en ligning som kan integreres på ny. Resultatet skal bli *Reynolds ligning*:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 6\frac{h - \overline{h}}{h^3}$$

hvor integrasjonskonstanten $\overline{h}$ må bestemmes ut fra passende randbetingelser. Gjør dette, under antagelsene $p(0) = p(1) = 0$ og $h(x) = 1 - \alpha x$. Omtrent hvor stort blir smøringstrykket når $L \approx 20\,\mathrm{mm}$?