TMA4195 Matematisk modellering 2003

Øving 8

Veiledning: 2003–11–03

1: (Eksamen januar 1985, oppgave 1) "Studentmila" foregår på et stadion med lengde $L = 400\,\mathrm{m}$. Vi skal anta at løpshastigheten v^* avtar lineært med tettheten ρ^* slik at $v^* = v^*_{\max}$ for $\rho^* = 0$ studenter/km og $v^* = 0\,\mathrm{km/h}$ når $\rho^* = \rho^*_{\max}$.

(a) Still opp bevarelsesloven for studenter under forutsetningene ovenfor, før inn dimensjonsløse variable og vis at differensialformuleringen kan bringes på formen

$$\rho_t + (1 - 2\rho)\rho_x = 0 \tag{1}$$

der $0 \leq \rho \leq 1$ og $\rho(x, t)$ er en 2π-periodisk funksjon av x.

(b) Angi (på implisitt form) den eksakte løsningen av (1) hvis

$$\rho(x, 0) = \rho_0 + \varepsilon \cos(x), \quad 0 < \rho_0 \pm \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

(c) Skissér karakteristikkene som svarer til startverdiene i (b). Vis at løsningen nødvendigvis vil bryte sammen etter en tid og utvikle et sjokk.

(d) Når dannes sjokket, hvordan beveger det seg og hva skjer når $t \to \infty$?
(*Hint*: Betrakt skjæringspunktet for karakteristikker som starter i $\frac{3}{2}\pi \pm \theta$, $0 < \theta < \pi$.)