75042 Partielle differensialligninger 22. desember 1995

Løsningsforslag

Oppgave 1

De karakteristiske ligningene blir

$$\dot{x} = 2yz, \quad \dot{y} = -1, \quad \dot{z} = 0$$

Åpenbart skal z være konstant, $y = -t$ (vi benytter her friheten til å velge parametrisering av karakteristikken til å kaste bort en integrasjonskonstant), og da blir $\dot{x} = -2zt$ som gir $x = a - zt^2$ for en konstant a (siden z er konstant).

Ved å sette inn $t = 0$ får vi punktet $(x, y, z) = (a, 0, z)$ og skal karakteristikken ligge i grafen til u får vi $z = a$ fra initialbetingelsen $u(x, 0) = x$. Grafen til u er da satt sammen av kurvene $x = a(1 - t^2)$, $y = t$, $z = a$ som gir svaret $u = z$:

$$u(x, y) = \frac{x}{1 - y^2}$$

Oppgave 2

Med $u = e^v$ finner vi

$$u_t + (u^2)_x = (e^v)_t + (e^{2v})x = e^v v_t + 2e^{2v} v_x = e^v(v_t + 2e^v v_x) = e^v\bigl(v_t + 2(e^v)_x\bigr)$$

som gjør ekvivalensen opplagt for glatte funksjoner v. For et enkelt sjokk med venstretilstand v_l og høyretilstand v_r og sjokkhastighet s blir Rankine-Hugoniot-betingelsene:

$$s = \frac{u_r^2 - u_l^2}{u_r - u_l} = u_r + u_l = e^{v_r} + e^{v_l} \text{ for } u, \qquad s = \frac{e^{v_r} - e^{v_l}}{v_r - v_l} \text{ for } v,$$

og disse to uttrykkene for s er forskjellige, slik at ekvivalensen ikke holder for svake løsninger.

Oppgave 3

a Her opererer vi altså med fluksfunksjon $f(u) = (u^2 - \pi^2)^2/4$ og karakteristiske hastigheter $f'(u) = (u^2 - \pi^2)u$.

I tilfelle (i) er svaret gitt ved et enkelt sjokk med hastighet 0: $u(x,t) = -\pi$ for $x < 0$ og $u(x,t) = \pi$ for $x > 0$. (Entropibetingelsen er oppfylt fordi $u_l < u_r$ og grafen til f ligger over sekanten mellom $(u_l, f(u_l)) = (-\pi, 0)$ og $(u_r, f(u_r) = (\pi, 0)$.)

I tilfelle (ii) vil sjokket ikke oppfylle entropibetingelsen, og vi må bruke den berømte gummistrikkmetoden: Strekk en gummistrikk over grafen til f fra π til $-\pi$. Strikken vil berøre grafen mellom to punkter $-v$ og v (pga symmetri), som gir en fortynningsbølge. Mellom $-\pi$ og $-v$ og mellom v og π henger strikken i luften, som svarer til to sjokk. Sekanten må berøre grafen i punktet v, som gir ligningen

$$f'(v) = \frac{f(v) - f(\pi)}{v - \pi}, \text{ dvs } (v^2 - \pi^2) = \frac{1}{4}\frac{(v^2 - \pi^2)^2}{v - \pi}$$

som foruten de opplagte løsningene $v = \pm\pi$ har løsningen $v = \pi/3$, med tilhørende karakteristisk hastighet $f'(v) = -8\pi^3/27$. Tar vi symmetrien med i betraktning, ender vi altså med

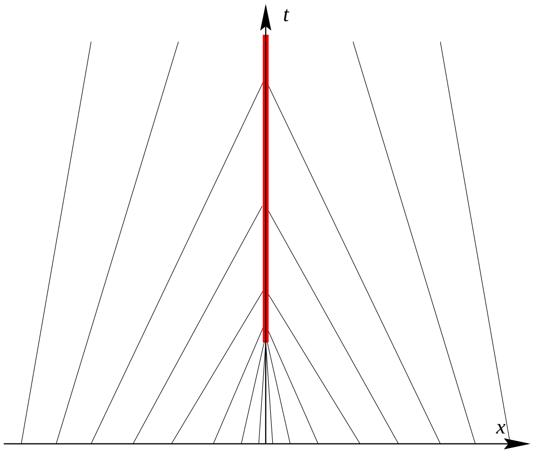
$$u(x,t) = \begin{cases} \pi & x < -\frac{8}{27}\pi^3 t \\ (*) & -\frac{8}{27}\pi^3 t < x < \frac{8}{27}\pi^3 t \\ \pi & x > \frac{8}{27}\pi^3 t \end{cases}$$

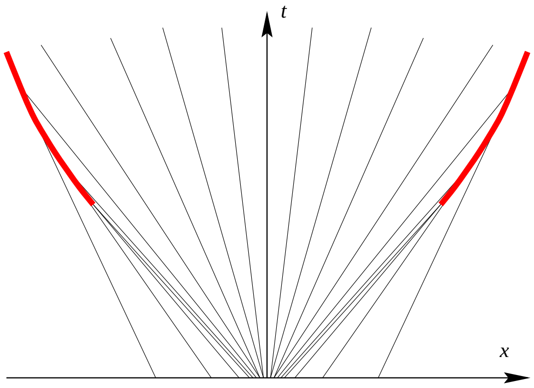
der $(*)$ betegner løsningen u av $f'(u) = x/t$, det vil si $u^3 - \pi^2 u = x/t$ (denne ligningen lar vi stå uløst).

b I disse to tilfellene har initialdataene samme grenseverdier i $\pm\infty$ som i Riemannproblemene (i) og (ii), og dette gjør at det ikke er urimelig å vente at løsningene har visse fellestrekk. Om vi reskalerer løsningene av (iii) og (iv) med samme skala i x og t–retning, er ligningen (1) uendret, mens initialdataene nærmer seg initialdataene for (i) og (ii) dersom vi lar skalaene gå mot uendelig. Derfor burde løsningene av (iii) og (iv) utvikle sjokk omtrent lik de for (i) og (ii), og etter lang tid ha tilnærmet de samme verdiene mellom sjokkene.

Om vi betegner initialdataene med $u_0(\xi) = \pm 2 \operatorname{arctg} \xi$, blir hastigheten til karakteristikken som starter i $(\xi, 0)$ lik $f'(u_0(\xi)) = \pm c(\xi)$ der c er funksjonen oppgitt i oppgaven. Denne karakteristikken har da ligning $x = \xi \pm c(\xi)t$, og sjokk oppstår først for den ξ der $\pm c'(\xi)$ er minimal (negativ med størst absoluttverdi). For tilfelle (iii) er det for $\xi = 0$, mens for tilfelle (iv) bruker vi minustegnet, og da skjer det i punktene ± 2.26 omtrent (av figuren kan du bare se at tallet ligger rundt 2, og det er selvsagt akseptabelt).

Altså: I tilfelle (iii) oppstår sjokk for $\xi = 0$ ved tid $t = -1/c'(0) = 1/(2\pi^2)$ ($t \approx 1/19.7$ fra figuren). Alle karakteristikker fra begge sider vil treffe dette sjokket, som får hastighet 0 og altså ligningen $x = 0$ for $t > 1/(2\pi^2)$.





Sjokk og karakteristikker i tilfelle (iii) til venstre og tilfelle (iv) til høyre. x– og t–aksene er ikke likt skalert, og tegningene er langt fra eksakte — de er ikke beregnet, men håndtegnet i et tegneprogram. Merk at sjokkene *ikke* starter i $t = 0$.

I tilfelle (iv) oppstår sjokk for $\xi \approx \pm 2$, ved tid $t \approx 1/2$ (siden $c'(\pm 2) \approx 2$ fra figuren). Dette blir ved posisjon rundt $x \approx 2 + 10 \cdot 2 = 22$ (for $c(2) \approx -10$) og $x \approx -22$ (ved symmetri). For store t venter vi at sjokkene går med hastigheter $\approx \pm 8\pi^3/27$ (som i tilfelle (ii)); karakteristikkene som har startet nær origo med hastigheter i intervallet $[-8\pi^3/27, 8\pi^3/27]$ treffer aldri noen av sjokkene, og ligner for store t på fortynningsdelen av løsningen i tilfelle (ii). Alle de andre karakteristikkene treffer ett av sjokkene før eller siden.

Oppgave 4

a La $v = \Delta u$. Ifølge antagelsene er $v \in C^2(\Omega)$, v er harmonisk i Ω, og $v \geq 0$ på $\partial\Omega$. Ved det svake maksimumsprinsippet er da $v \geq 0$ i hele Ω.

Det vil si at $\Delta u \geq 0$. Ved det svake maksimumsprinsippet igjen vil u oppnå sitt maksimum på $\partial\Omega$, og siden $u \leq 0$ der er $u \leq 0$ i Ω ved det svake maksimumsprinsippet. Hvis u ikke er konstant vil u ikke oppnå sitt maksimum i noe punkt i Ω (ved det sterke maksimumsprinsippet), og dermed kan heller ikke $u = 0$ i noe indre punkt, siden dette da ville være et maksimum. Altså er $u < 0$ i Ω.

b Anta u og v er to løsninger til problemet. Om de ikke er like, kan vi anta $u > v$ i en ikketom delmengde av Ω (ellers bytter vi bare om u ov v). La $\Omega_+ = \{x \in \Omega \colon u(x) > v(x)$ og betrakt funksjonen $w = u - v$ i Ω_+. Vi har $w = 0$ på $\partial\Omega_+$ (her bruker vi den gitte randbetingelsen på den delen av $\partial\Omega_+$ som faller sammen med $\partial\Omega$, og litt enkel topologi i den delen av $\partial\Omega_+$ som ligger inne i Ω). Men i Ω_+ er $\Delta w = f(u) - f(v) \geq 0$, slik at w oppnår sitt maksimum på $\partial\Omega_+$ ved det svake maksimumsprinsippet. Men dette strir mot $w > 0$ i Ω_+, og denne motsigelsen avslutter beviset.

Oppgave 5

Vi finner

$$
\begin{aligned}
f * \phi(x) &= \int f(x - y\phi(y)\, dy = \int_0^\infty \int_{\partial B(0,r)} f(x,y)\, dS_y\, \tilde{\phi}(r)\, dr \\
&= \int_0^\infty m\omega_m r^{m-1} f(x)\tilde{\phi}(r)\, dr = f(x) \int_0^\infty m\omega_m r^{m-1}\tilde{\phi}(r)\, dr \\
&= f(x) \int_{\mathbf{R}^m} \phi(y)\, dy
\end{aligned}
$$

og deretter

$$
\begin{aligned}
\Delta f &= \Delta(f * \phi) = f * \Delta\phi = \int_0^\infty \int_{\partial B(0,r)} f(x-y) r^{1-m} \frac{d}{dr}\Big(r^{m-1} \frac{d\tilde{\phi}(r)}{dr} \Big)\, dr \\
&= m\omega_m f(x) \int_0^\infty \frac{d}{dr}\Big(r^{m-1} \frac{d\tilde{\phi}(r)}{dr} \Big) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Oppgave 6

a En fundamentalløsning oppfyller $\Delta u - \delta$. I $\mathbf{R}^2$ er

$$u = \frac{1}{2\pi} \ln r$$

en fundamentalløsning.

b $(\Delta u, \phi) = (u, \Delta\phi) = \iint_{\mathbf{R}^2} u\Delta\phi \, dx \, dy$. Vi deler opp integrasjonsområdet i øvre og nedre halvplan, og i hvert halvplan Ω bruker vi formelen

$$\iint_{\Omega} (u\Delta\phi - \phi\Delta u) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \Big(u\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial u}{\partial n} \Big) \, ds$$

hvor vi setter inn $\Delta u = f$ (gjelder i hvert av halvplanene). Randen av hvert halvplan er x–aksen, og der blir da $\partial/\partial n = -\partial/\partial y$ for øvre halvplan og $\partial/\partial n = \partial/\partial y$ for nedre halvplan (normalvektoren peker ut). Vi legger sammen ligningene for øvre og nedre halvplan, og ser at termene med $\int_{\partial\Omega} u\partial\phi/\partial n$ faller mot hverandre, mens de med $\int_{\partial\Omega} \phi\partial u/\partial n$ adderes (for $\partial u/\partial y$ er diskontinuerlig på x–aksen, med motsatt like stor verdi i oppover- og nedover-retning. Mer presist er $\lim_{y\to 0\pm} u_y = \pm g(x)$, og dermed $\partial u/\partial n = -g(x)$ for både øvre og nedre halvplan! Alt i alt ender vi derfor med

$$\iint_{\mathbf{R}^2} (u\Delta\phi - f\phi) \, dx \, dy = \int_{\mathbf{R}} 2g(x)\phi(x) \, dx$$

eller med andre ord

$$(\Delta u, \phi) = \iint_{\mathbf{R}^2} f\phi \, dx \, dy + \int_{\mathbf{R}} 2g(x)\phi(x) \, dx$$

og det er dette siste vi skriver som $(f + 2g(x)\delta(y), \phi)$.

c Vi skulle forvente at $u = G * \big(f + 2g(x)\delta(y)\big)$ skulle løse ligningen $\Delta u = f + 2g(x)\delta(y)$, der $G(x, y) = (1/(2\pi)) \ln r = (1/(4\pi) \ln(x^2 + y^2)$. Her blir

$$G * f(x, y) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathbf{R}^2} \ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2) f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$$

som leder til den første delen av det oppgitte svaret om vi bruker symmetrien $f(\xi, -\eta) = f(\xi, \eta)$ til å flytte integralet over nedre halvplan til øvre halvplan.

Videre blir

$$G*(2g(x)\delta(y)) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbf{R}^2} \ln((x-\xi)^2+(y-\eta)^2) g(\xi)\delta(\eta) \, d\eta \, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln((x-\xi)^2+y^2) g(\xi) \, d\xi$$

og det forklarer den andre delen av det oppgitte svaret.

Med $f = 0$ får vi ved derivasjon under integralet:

$$u_y(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} g(\xi)\, d\xi$$

og vi finner at integralkjernen her oppfyller de klassiske kravene til en δ–følge:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{x^2+y^2}\, dx = 1$$

og

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{\pi}\int_{|x|>\epsilon} \frac{y}{x^2+y^2}\, dx = 0$$

for enhver $\epsilon > 0$. (Av dette følger at om vi setter

$$h(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{y}{x^2+y^2}\, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

så vil $h(x,y)$ konvergere (som distribusjon) mot en Heaviside-funksjon av x når $y \to 0$ og dermed vil den deriverte konvergere mot δ.)