NTH
UNIVERSITETET I TRONDHEIM
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen   73 59 35 25

EKSAMEN I FAG 75042 PARTIELLE DIFFERENSIALLIGNINGER

Fredag 22. desember 1995
Tid: 09:00–15:00

Hjelpemidler: Ingen lommekalkulator.
Ingen trykte og skrevne hjelpemidler.

Oppgave 1 Løs initialverdiproblemet

$$2yuu_x - u_y = 0, \quad u(x,0) = x$$

Oppgave 2 La v være en C^1–funksjon av to variable (x,t) og la $u(x,t) = e^{v(x,t)}$. Vis at u oppfyller

$$u_t + (u^2)_x = 0$$

hvis og bare hvis

$$v_t + 2(e^v)_x = 0$$

men at de to ligningene ikke er ekvivalente dersom v bare antas å være stykkevis glatt og vi tolker ligningene i svak forstand.

Oppgave 3

a) Finn svake entropiløsninger (dvs svake løsninger som oppfyller entropibetingelsen) til Riemannproblemet

$$u_t + \frac{1}{4}\Big((u^2 - \pi^2)^2\Big)_x = 0 \qquad (x \in \mathbf{R}, t > 0) \tag{1}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} u_l & x < 0 \\ u_r & x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

i hvert av de to tilfellene

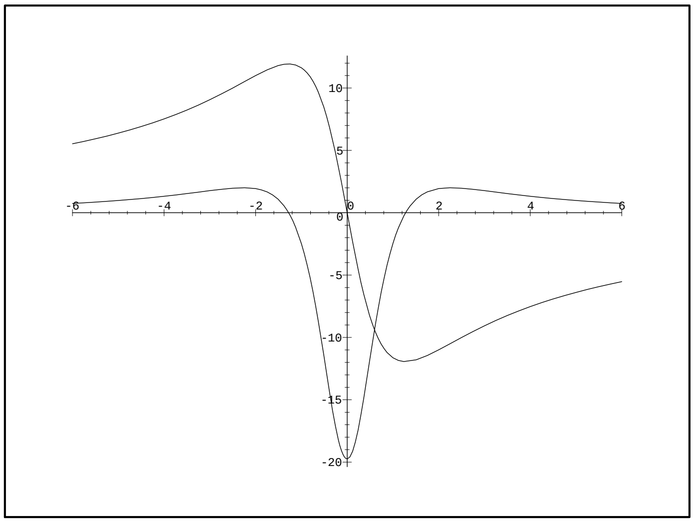
$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & u_l = -\pi, & u_r = \pi \\ \text{(ii)} & u_l = \pi, & u_r = -\pi \end{array}$$

(I ett av tilfellene kreves løsning av en tredjegradsligning for å skrive svaret på eksplisitt form. Ikke løs den ligningen, men la den stå på implisitt form.)

b) Betrakt initialverdiproblemene for (1) i de to tilfellene

$$\begin{array}{ll} \text{(iii)} & u(x,0) = 2\operatorname{arctg} x \\ \text{(iv)} & u(x,0) = -2\operatorname{arctg} x \end{array}$$

Hvorfor er det rimelig å forvente at løsningene har visse fellestrekk med løsningene fra forrige punkt? Tegn diagrammer som viser karakteristikker og sjokk i (x,t)-planet i de to tilfellene, og angi spesielt tidspunkt og posisjon der sjokk først oppstår. Du kan uten videre utregning benytte den informasjon du kan trekke ut av grafen til funksjonen $c(\xi) = 8\operatorname{arctg}^3 \xi - 2\pi^2 \operatorname{arctg} \xi$ og dens deriverte på figuren nedenfor.



Oppgave 4

a) La $u \in C^4(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ oppfylle $\Delta\Delta u = 0$ i et begrenset område Ω, mens på $\partial\Omega$ er $\Delta u \geq 0$ og $u \leq 0$. Vis at $u < 0$ i Ω, om ikke u er konstant.

b) Vis at det ikke kan finnes mer enn en løsning $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ til problemet

$$\Delta u = f(u) \text{ i } \Omega, \quad u = g \text{ på } \partial\Omega$$

der en voksende kontinuerlig funksjon f og $g \in C(\partial\Omega)$ er gitt.

Oppgave 5 En kontinuerlig funksjon på et område $\Omega \subseteq \mathbf{R}^m$ sies å ha *middelverdiegenskapen* dersom, for hver $x \in \Omega$ og hver $r > 0$ slik at $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$,

$$f(x) = \frac{1}{m\omega_m r^{m-1}} \int_{\partial B(x,r)} f(y) dS_y.$$

Her er $B(x,r) = \{y \in \mathbf{R}^m : |x-y| < r\}$, $\partial B(x,r)$ er overflaten av denne ballen, $m\omega_m r^{m-1}$ er arealet av overflaten, og dS_y er et flateelement på overflaten. Det følger av Poissons integralformel at en harmonisk funksjon oppfyller middelverdiegenskapen. I denne oppgaven skal du vise omvendingen av dette resultatet.

La derfor $f \in C(\Omega)$ ha middelverdiegenskapen, og la $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$ være en radielt symmetrisk testfunksjon: $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(|x|)$ der $\tilde{\varphi}(r) = 0$ for $r \geq \delta$. Konvolusjonsproduktet $f * \varphi$ kan da defineres for alle $x \in \Omega$ med avstand $> \delta$ til $\partial\Omega$.

Vis først at

$$f * \varphi(x) = f(x) \int_{\mathbf{R}^m} \varphi(y)\, dy$$

under betingelsene beskrevet ovenfor. (*Hint*: Du kan uten bevis benytte formelen for integrasjon i "polarkoordinater" i $\mathbf{R}^m$:

$$\int_{\mathbf{R}^m} g(y)\, dy = \int_0^\infty \int_{\partial B(0,r)} g(y)\, dS_y\, dr$$

(i $\mathbf{R}^2$ med $y = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ er for eksempel $dS_y = r\, d\theta$.))

Vis deretter at f er harmonisk. (*Hint*: Velg φ i formelen ovenfor slik at $\int_{\mathbf{R}^m} \varphi(y)\, dy = 1$. Hvilke regler har vi for derivasjon av et konvolusjonsprodukt? Jeg minner om formelen

$$\Delta\varphi = r^{1-m} \frac{d}{dr}\left(r^{m-1} \frac{d\tilde{\varphi}(r)}{dr}\right)$$

for Laplaceoperatoren på radielt symmetriske funksjoner.)

Oppgave 6

a) Hva menes med en fundamentalløsning for Laplaceoperatoren? Gi en fundamentalløsning for Δ gyldig i $\mathbf{R}^2$.

b) Betrakt en løsning u for Poissonligningen med Neumann randbetingelser i øvre halvplan:

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x,y) \qquad (x \in \mathbf{R}, y > 0) \\ u_y(x,0) &= g(x) \qquad (x \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

Anta u er C^2 i det åpne øvre halvplan ($y > 0$) og C^1 i det lukkede øvre halvplan ($y \geq 0$). Utvid u til hele $\mathbf{R}^2$ ved å sette $u(x,y) = u(x,|y|)$. Vis at

$$\Delta u = f + 2g(x)\delta(y)$$

i distribusjonsforstand. Det er en del av oppgaven å forklare hvordan høyresiden virker som distribusjon.

c) Forklar hvordan resultatene over leder til formelen

$$\begin{aligned} u(x,y) = &\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Big(\ln((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2) + \ln((x-\xi)^2 + (y+\eta)^2)\Big) f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \ln((x-\xi)^2 + y^2) g(\xi)\, d\xi \end{aligned}$$

for en løsning av problemet i forrige punkt. Sett til slutt $f = 0$ for enkelhets skyld, og anta videre at g er kontinuerlig med kompakt støtte (support). Kontroller direkte at løsningen oppfyller $\lim_{y \to 0} u_y(x,y) = g(x)$,