75042 Partielle differensialligninger 17. januar 1977

Løsningsforslag

Oppgave 1

a Karakteristikkene vil oppfylle

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y, \quad \dot{z} = z - 2xy^2.$$

Dette gir $x = Ae^t$, $y = Be^{-t}$ slik at ligningen for z kan skrives $\dot{z} = z - 2AB^2e^{-t}$ som har løsning $z = AB^2e^{-t} + Ce^t$. (Bruk integrerende faktor e^{-t}: $\mathrm{d}(e^{-t}z)/\mathrm{d}t = e^{-t}(\dot{z} - z) = -2AB^2e^{-2t} = \mathrm{d}(AB^2e^{-2t})/\mathrm{d}t$ som gir $e^{-t}z = AB^2e^{-2t} + C$.)

Initialdataene er gitt for $x = y$. Vi benytter den frihet vi har til å velge nullpunkt for parameteren på den karakteristiske kurven og velger $t = 0$ når $x = y$. Dette gir $B = A$, og initialbetingelsen $u = 2x^3$ når $x = y$ gir oss da for $t = 0$: $x = y = A$, $z = 2A^3$ som sammen med $z = A^3 + C$ leder til $C = A^3$. De karakteristiske kurvene i grafen til u er altså gitt ved

$$x = Ae^t, \quad y = Ae^{-t}, \quad z = A^3(e^{-t} + e^t).$$

De to første ligningene gir oss $A = \sqrt{xy}$ og $e^t = \sqrt{x/y}$ som innsatt gir

$$u(x, y) = z = (xy)^{3/2}\left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}}\right) = xy^2 + x^2y.$$

Karakteristikkene projisert i xy–planet, gitt ved $x = Ae^t$ og $y = Ae^{-t}$ dekker akkurat første og tredje kvadrant ($xy > 0$), og det er bare her løsningen blir entydig definert.

b Karakteristikkene vil oppfylle

$$\dot{x} = xz, \quad \dot{y} = 1, \quad \dot{z} = 2y$$

som løses i rekkefølgen $y = t$ (her har vi med en gang benyttet friheten i valg av nullpunkt for parameteren til å kaste bort en integrasjonskonstant), $\dot{z} = 2t$ hvorav $z = t^2 + A = y^2 + A$, og $\dot{x} = (y^2 + A)x$ som er separabel:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int (y^2 + A)\,\mathrm{d}y \Longrightarrow \ln|x| = \frac{y^3}{3} + Ay + \text{konstant},$$

altså $x = Be^{y^3/3+Ay}$.

Initialbetingelsen $u(x,0) = x$ gir oss $z = x$ når $y = 0$, altså $A = B$. Med andre ord har vi $u = y^2 + A$ der $x = Ae^{y^3/3+Ay}$, som kan skrives

$$x = (u - y^2)e^{y^3/3+(u-y^2)y} = (u - y^2)e^{uy-2y^3/3}.$$

Dette er en ligning som definerer u implisitt som funksjon av x og y. For $y = 0$ gir den umiddelbart $u = x$, som den skal.

Oppgave 2

Siden $\operatorname{div}(uDu) = |Du|^2 + u\Delta u$ vil divergensteoremet gi oss

$$\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S = \int_\Omega (|Du|^2 + u\Delta u)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Sett inn $u = -q\partial u/\partial\nu$ på venstresiden og $\Delta u = pu$ på høyresiden og få

$$-\int_{\partial\Omega} q\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \mathrm{d}S = \int_\Omega (|Du|^2 + pu^2)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

I følge antagelsene er begge integralene er ≥ 0, og på grunn av miustegnet må de da begge være lik 0. Av kontinuiteten følger dermed at integranden på begge sider er identisk 0. Spesielt er $Du = 0$, slik at u er konstant i Ω. Dessuten følger at $u = -q\partial u/\partial\nu = 0$ på $\partial\Omega$, og siden u er konstant er $u = 0$ i hele Ω.

Bytter vi ut randbetingelsen med $\partial u/\partial\nu = 0$ på $\partial\Omega$ blir venstresiden i (1) umiddelbart 0, og (2) blir erstattet med $0 = \int_\Omega (|Du|^2 + pu^2)\mathrm{d}x$. Som før slutter vi at u er konstant, men vi kan ikke konkludere med at $u = 0$ på samme måten som før. Dersom $p > 0$ noen steder får vi $u = 0$, men om $p = 0$ overalt vil enhver konstant u løse problemet.

Oppgave 3

Siden randbetingelsen er gitt ved den normalderiverte i stedet for at verdien av u er gitt direkte på randen, kan ikke maksimumsprinsippet anvendes direkte. Oppgaven løses nok greiest med en energimetode. Anta først at u løser det tilhørende homogene problemet, altså med $f = g = h = 0$. Definer

$$e(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u(x,t)^2\,\mathrm{d}x,$$

så blir (takket være divergensteoremet og identiteten $\operatorname{div}(uDu) = |Du|^2 + u\Delta u$)

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \int_\Omega u u_t\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u\Delta u\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial\nu}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega |Du|^2\,\mathrm{d}x \le 0\end{aligned}$$

siden randintegralet er 0. Men nå er $e(0) = 0$ og $e(t) \ge 0$ for alle t, og det følger at $e(t) = 0$ for alle $t \le T$, slik at $u = 0$ i Ω_T. Entydigheten for det opprinnelige problemet følger nå ved det vanlige linearitetsargumentet (anvend det vi nettopp har vist på differansen mellom to løsninger).

Oppgave 4

Det gitte problemet løses ved konvolusjon med fundamentalløsningen Φ:

$$u(x) = -f * \Phi(x) = \int_{\mathbf{R}^3} f(x-y)\Phi(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^3} f(y)\Phi(x-y)\,\mathrm{d}y; \qquad \Phi(x) = \frac{1}{4\pi|x|} \tag{3}$$

Dersom v er en annen begrenset løsning vil $w = u - v$ være en harmonisk begrenset funksjon, med da er w konstant ved Liouvilles teorem. Dette viser entydigheten opp til en additiv konstant, og det er alt vi kan oppnå her om vi da ikke krever at løsningen skal gå mot null i det uendelig fjerne (det burde vært presisert i oppgaven, som altså var feil på dette punktet).

Når $|x|$ er stor vil alle verdiene av $x - y$ der $f(y) \neq 0$ ligge relativt nær hverandre, slik at $\Phi(x-y)$ i (3) kan settes tilnærmet lik en konstant. Mer presist kan vi skrive

$$\begin{aligned}u(x) &= \int_{\mathbf{R}^3} f(y)\Phi(x)\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbf{R}^3} f(y)\big(\Phi(x-y) - \Phi(x)\big)\,\mathrm{d}y \\ &= 0 + \int_{\mathbf{R}^3} f(y)\frac{|x| - |x-y|}{4\pi|x-y||x|}\,\mathrm{d}y = O(|x|^{-2})\end{aligned}$$

fordi $||x| - |x-y|| \le y$ som er begrenset når $f(y) \neq 0$, og $|x-y|$ i nevneren er minst så stor som $|x|/2$ når $f(y) \neq 0$ og $x \ge 2\sup\{y\colon f(y) \neq 0\}$. (Merk at vi brukte antagelsen for å se at det første integralet ovenfor ble 0. Uten denne antagelsen får vi bare $u(x) = O(|x|^{-1})$.)

Oppgave 5

Løsningsformelen for tre romdimensjoner gir en løsningsformel for to romdimensjoner ved en metode som kalles *method of descent*, som grovt sett går ut på å betrakte et tredimensjonalt problem der initialdata og løsning ikke avhenger av den tredje romkoordinaten.

For å løse det gitte problemet i to romdimensjoner, la $\tilde{g}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)$ og $\tilde{h}(x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2)$, legg merke til at den resulterende løsningen i tre romdimensjoner $\tilde{u}$ ikke avhenger av x_3, slik at den kan skrives $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2)$. Men da vil u løse problemet i to romdimensjoner.

Vi parametriserer $\partial B(x, t)$ med (y_1, y_2) og setter $y_3 = x_3 + \sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}$. Dette dekker øvre halvdel av kuleskallet — vi kan nøye oss med å integrere over denne delen og gange med 2, siden integranden ikke inneholder y_3. Dette gir oss

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right)^2}\, \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \\ &= \sqrt{1 + \frac{(y_1 - x_1)^2}{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2} + \frac{(y_2 - x_2)^2}{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}\, \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \\ &= \frac{t}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}\, \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 = \frac{t}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}}\, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

som innsatt i Kirchoffs formel gir oss

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{B(x,t)} \frac{t^2 h(y) + t g(y) + t Dg(y) \cdot (y - x)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}}\, \mathrm{d}y$$

Den viktigste forskjellen på dette og formelen i tre romdimensjoner er at integralet går over hele disken $B(x, t)$ i to romdimensjoner, mens i tre romdimensjoner integreres bare over randen $\partial B(x, t)$. Det betyr at en lokalisert forstyrrelse i tre romdimensjoner brer seg ut som et kuleskall, hvor løsningen faller til ro i det bølgefronten passerer (Huygens prinsipp), mens i to romdimensjoner vil forstyrrelsene vedvare i det uendelige etter at bølgefronten er passert.

Oppgave 6

Problemet er en standard konserveringslov med fluksfunksjon $F(u) = \cos u$ og karakteristisk hastighet $F'(u) = -\sin u$.

a Om vi har en glatt løsning, vil denne være konstant langs karakteristikkene. Karakteristikken som starter i posisjon ξ for $t = 0$ vil ha ligning $x = \xi + tF'(u(\xi, 0)) = \xi - t\sin\xi$. Så lenge x er en strengt voksende funksjon av ξ kan dette løses for ξ, og vi får en glatt løsning. Nå er $\partial x/\partial\xi = 1 - t\cos\xi$ som er positivt for alle ξ så lenge $0 \le t < 1$, og så langt fram vil en glatt løsning finnes. Men for $t = 1$ og $\cos\xi = 1$, det vil si for $\xi = 2\pi n$ (heltallig n), vil det måtte oppstå sjokk i løsningen. Nå er $F'(2\pi n) = \sin 2\pi n = 0$, så karakteristikkene som gir opphav til sjokk har hastighet 0. Sjokk vil dermed oppstå i $(x, t) = (2\pi n, 1)$ for heltallige n.

b Med en svak løsning menes en funksjon slik at

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \big(u(x,t)\varphi_t(x,t) + \cos u(x,t)\varphi_x(x,t)\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^\infty x\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{4}$$

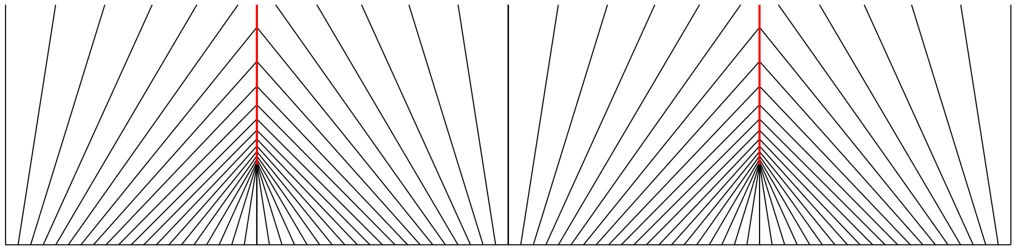
for alle testfunksjoner (glatte funksjoner med kompakt støtte) φ. (Denne formelen oppstår ved at den opprinnelige ligningen multipliseres med $\varphi(x,t)$ og integreres over øvre halvplan, etterfulgt av en delvis integrasjon.)

En svak entropiløsning er en svak løsning som oppfylle en entropibetingelse. Det finnes flere varianter av entropibetingelsen. Lax-betingelsen ($F'(u_l) \ge \sigma \ge F'(u_r)$ der σ er sjokkhastigheten) er kun tilstrekkelig for konvekse (eller konkave) fluksfunksjoner, og kan ikke anvendes her. I stedet kan man forlange at løsningen skal være en grense for løsninger av $u_t + F(u)_x = \varepsilon\Delta u$ når $\varepsilon \searrow 0$, som gir at sekanten mellom $(u_l, f(u_l))$ og $(u_r, f(u_r))$ må ligge på en side av grafen til f (over om $u_l > u_r$, under om $u_l < u_r$).

La $v(x,t) = -u(-x,t)$. Vi finner at v er en svak entropiløsning av det gitte problemet: Den oppfyller opplagt initialbetingelsene, og den blir en svak løsning (bytt ut x med $-x$ i (4) og pass på fortegnet til φ_x), og den oppfyller entropibetingelsen (fortegnskiftet i x ødelegger den og minustegnet foran gjør skaden god igjen). Ved entydigheten må $v = u$, så $u(-x,t) = -v(x,t) = -u(x,t)$.

La så $v(x,t) = u(x + 2\pi, t) - 2\pi$. Da vil v igjen være en svak entropiløsning for problemet, og dermed er $v = u$ ved entydigheten. Så $u(x + 2\pi, t) = v(x,t) + 2\pi = u(x,t) + 2\pi$.

På grunn av symmetrien ($u(-x,t) = -u(x,t)$) må sjokket som oppstår i $(x,t) = (0,1)$ forbli stasjonært. Alle karakteristikkene som starter i et punkt $(\xi, 0)$ med $0 \le \xi < \pi$ går med negativ hastighet og treffer dette sjokket fra høyre, om de da ikke kolliderer med hverandre og starter nye sjokk før den tid. En slik karakteristikk, med ligning $x = \xi - t\sin\xi$, treffer sjokket i $x = 0$ for $t = \xi/\sin/xi$. Deriver for å finne $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\xi = (sin\xi - \xi\cos\xi)/\sin^2\xi > 0$ for $0 < \xi < \pi$ (telleren er positiv, siden $\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi(sin\xi - \xi\cos\xi) = \xi\sin\xi > 0$ for $0 \le \xi \le \pi$. Dermed vil ikke disse karakteristikkene krysse hverandre før de treffer sjokket i $x = 0$. Ved symmetri vil tilsvarende gjelde karakteristikkene fra $-\pi < \xi \leq 0$. Dermed har vi full oversikt over karakteristikker og sjokk for $-pi \leq x \leq \pi$, og siden $u(x+2\pi,t) = v(x,t)+2\pi = u(x,t)+2\pi$ vil bildet av karakteristikker og sjokk gjenta seg periodisk med periode 2π i x.



Figur 1: Karakteristikker og sjokk for løsningen.

Betrakt nå et punkt (x,t) med $2n\pi < x < 2(n+1)\pi$. Dette skal ligge på en karakteristikk som starter i et punkt ξ med $2n\pi < \xi < 2(n+1)\pi$, og ξ skal altså bestemmes ved disse ulikhetene og $x = \xi - t\sin\xi$. På karakteristikken er $u(x,t) = u(\xi,0) = \xi$, så vi konkluderer slik:

For $2n\pi < x < 2(n+1)\pi$ er $u(x,t)$ entydig gitt ved $2n\pi < u(x,t) < 2(n+1)\pi$ og $x = u(x,t) - t\sin u(x,t)$. Om $x = 2n\pi$ og $0 \leq t \leq 1$ er $u(x,t) = x$, mens for $t > 1$ har vi et sjokk i $x = 2n\pi$.

Oppgave 7

Klassifiseringen av den gitte ligningen bestemmes av fortegnet til diskriminanten $\Delta = (x^2 - 1)(y^2-1) - (xy)^2 = 1 - x^2 - y^2$, slik:

$$\begin{array}{lll} x^2+y^2<1 & \Delta > 0 & \text{elliptisk,} \\ x^2+y^2=1 & \Delta = 0 & \text{parabolsk,} \\ x^2+y^2>1 & \Delta < 0 & \text{hyperbolsk.} \end{array}$$

Den karakteristiske ligningen er $(x^2-1)\xi^2 + (y^2-1)\eta^2 + 2xy\xi\eta = 0$, som vi kan skrive

$$(x\xi + y\eta)^2 = 1$$

dersom vi velger $\xi^2 + \eta^2 = 1$ (husk at den karakteristisk ligningen er homogen i (ξ,η) slik at om (ξ,η) er en løsning er også $(k\xi,k\eta)$ det, så vi taper ingen generalitet ved dette valget). Nå husker vi videre at denne ligningen er en ligning for *normalvektoren* (ξ,η) til en karakteristisk kurve gjennom (x,y). Men da ser vi jo at linjene $x\xi + y\eta = \pm 1$, for fast (ξ,η) med $\xi^2+\eta^2 = 1$, blir karakteristikker for problemet. Disse linjene er akkurat de som tangerer enhetssirkelen.