75042 Partielle differensialligninger

Oppgavesett #2 (til 1997–09–16) — løsningsforslag

De fleste oppgavene denne gang var hentet fra Fritz John (FJ) side 18–19.

FJ–1(a): Vi er gitt $u_x + u_y = u^2$ med $u(x,0) = h(x)$.

De karakteristiske ligningene blir

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 1, \quad \dot{z} = z^2.$$

Jeg pleier å organisere dette litt annerledes i praktisk regning enn i den teoretiske beskrivelsen av metoden: Spesielt har vi litt frihet i valget av parametrisering av de karakteristiske kurvene, i det vi kan velge punktet $s = 0$ fritt på kurven.[1] I praksis betyr det at en av de tre integrasjonskonstantene i den generelle løsningen av de karakteristiske ligningene er fritt valgbar. Jeg bruker gjerne det til å velge parameteren slik at vi har $s = 0$ der initialbetingelsen er gitt.

For dette problemet betyr det at vi skriver

$$x = s + \xi, \quad y = s, \quad z = \frac{1}{C - s}$$

for løsningen, der ξ og C er integrasjonskonstanter. (z-ligningen er separabel. Om du har glemt hvordan du løser separable diff-ligninger, så *løp*, ikke gå, til nærmeste Edwards og Penney eller Kreyzsig eller et tilsvarende verk og lær det på ny. Men la meg minne deg på at $\dot{z} = z^2$ skrives formelt som $z^{-2}\mathrm{d}z = \mathrm{d}s$, hvor man setter et integraltegn foran på begge sider og får $-z^{-1} = s - C$.)

Når $s = 0$ har vi da $(x,y) = (\xi, 0)$, og initialbetingelsen $u(x,0) = h(x)$ sier at vi skal ha $z = h(\xi)$ i dette punktet. Med andre ord må $1/C = h(\xi)$, så $C = 1/h(\xi)$. Videre er $\xi = x - y$, og $s = y$, så vi kan uttrykke z ved (x,y) uten å involvere ξ og C, og resultatet er svaret vi søker:

$$u(x,y) = z = \frac{1}{C - s} = \frac{1}{1/h(x-y) - y}.$$

FJ–1(b): Vi er gitt $-xuu_x + u_y = 0$ med $u(x,0) = x$.

De karakteristiske ligningene blir

$$\dot{x} = -xz, \quad \dot{y} = 1, \quad \dot{z} = 0.$$

Her som ellers løser vi de enkleste ligningene først, og finner $z = C$ og $y = s$ (hvor jeg har brukt friheten til å velge $s = 0$ der $y = 0$ som i forrige punkt). x–ligningen blir nå $\dot{x} = -Cx$, og vi ender altså med

$$x = \xi e^{-Cs}, \quad y = s, \quad z = C$$

Setter vi $s = 0$ blir $(x,y) = (\xi, 0)$, og initialbetingelsen $u(x,0) = x$ sier at vi skal ha $z = \xi$ i dette punktet, altså $C = \xi$. Setter vi så inn $C = \xi = z$ og $s = y$ i den første ligningen over ender vi med $x = ze^{-zy}$, og løsningen z av denne ligningen skal altså være $u(x,y)$.

Vi kan legge til at ze^{-yz} ikke er en monoton funksjon av z, så z er ikke alltid entydig bestemt av (x,y). I en omegn om x–aksen skulle dette likevel ikke være noe problem.

FJ–1(c): Vi er gitt $xu_x + yu_y + u_z = u$ med $u(x,y,0) = h(x,y)$.

Siden bokstaven z er brukt, får vi bryte litt med tradisjonen og skrive $w = u(x,y,z)$.

De karakteristiske ligningene blir

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y, \quad \dot{z} = z, \quad \dot{w} = w.$$

Her er initialdata gitt for $z = 0$, så jeg setter $s = 0$ der $z = 0$, og ender med

$$x = \xi e^s, \quad y = \eta e^s, \quad z = s, \quad w = Ce^s$$

[1] Helt presist: Om $\big(x(s), y(s), z(s)\big)$ løser de karakteristiske ligningene vil også $\big(x(s+s_0), y(s+s_0), z(s+s_0)\big)$ gjøre det, fordi s ikke forekommer eksplisitt i de karakteristiske ligningene.

Med $s = 0$ blir $(x, y, z) = (\xi, \eta, 0)$ så $u(x, y, 0) = h(x, y)$ gir oss $C = h(\xi, \eta)$. Dermed er det lett å eliminere ξ, η, C og s, og vi står igjen med

$$u(x, y, z) = w = Ce^s = h(\xi, \eta)e^s = h(xe^{-z}, ye^{-z})e^z.$$

FJ–1(d): Vi er gitt $-yu_x + xu_y = u$ med $u(x, 0) = h(x)$.
De karakteristiske ligningene blir

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x, \quad z = z$$

Dette gir oss

$$x = \xi \cos s, \quad y = \xi \sin s, \quad z = Ce^s.$$

(Den generelle løsningen gir $x = \xi \cos s + \eta \sin s$ og $y = \xi \sin s - \eta \cos s$, men igjen velger jeg å la $s = 0$ der hvor $y = 0$ slik at $\eta = 0$.) Setter vi $s = 0$ blir $(x, y) = (\xi, 0)$ slik at $u(x, 0) = h(x)$ gir oss $C = h(\xi)$. Som vanlig må vi nå bestemme ξ og z som funksjoner av $x$og y, men vi finner jo

$$\frac{y}{x} = \tan s \quad \text{hvorav } s = \arctan \frac{y}{x}, \qquad x^2 + y^2 = \xi^2.$$

Vi ser at karakteristikkene er sirkler, og de skjærer x–aksen i to punkter hver. Dette vil gi vanskeligheter om vi forsøker å tilpasse intialbetingelsene i begge punkter. Så vi gjør det bare for den positive x-aksen, som gir $\xi = +\sqrt{x^2 + y^2}$ og vi ender med

$$u(x, y) = Ce^s = h(\xi)e^s = h(\sqrt{x^2 + y^2}) \exp \arctan \frac{y}{x}.$$

FJ–2: En løsning av ligningen $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = -u$ har ingen ekstrempunkter i det indre av disken med $u(x, y) \neq 0$, for i et ekstrempunkt er jo $u_x = u_y = 0$. Hvis $u > 0$ noe sted må derfor u oppnå sitt positive maksimum på randen $x^2 + y^2 = 1$. Anta (x_0, y_0) er et slikt maksimumspunkt. Siden $a(x_0, y_0)u_x(x_0, y_0) + b(x_0, y_0)u_y(x_0, y_0) = -u(x_0, y_0) < 0$ vil u vokse i retningen $(-a(x_0, y_0), -b(x_0, y_0))$. Men den retningen er inn i disken under den gitte betingelsen ($ax + by > 0$ på randen), og det strider mot at (x_0, y_0) er et maksimumspunkt. Det følger at $u \leq 0$ overalt.

Tilsvarende, om $u < 0$ noe sted må u oppnå sitt negative minimum et sted på randen, og samme argument med ulikhetene snudd om viser at dette ikke går.

En alternativ, mer geometrisk måte å se det på et å merke seg at u beholder sitt fortegn, men avtar i absoluttverdi, langs de karakteristiske kurvene siden en av de karakteristiske ligningene er $\dot{z} = -z$. Dette umuliggjør et positivt maksimum eller negativt minimum i det indre av disken. Men den oppgitte ulikheten sier at alle karakteristiske kurver som krysser randen forlater disken for økende s, eller (mer relevant) kommer inn i området for avtagende s. Men i den retningen (avtagende s) øker z i absoluttverdi, som umuliggjør eksistensen av et positivt maksimum eller negativt minimum på randen.

FJ–6: På vår standard form blir problemet $a(u)u_x + u_y = 0$ med $u(x, 0) = h(x)$. De karakteristiske ligningene blir

$$\dot{x} = a(z), \quad \dot{y} = 1, \quad \dot{z} = 0$$

med løsning

$$x = a(C)s + \xi, \quad y = s, \quad z = C.$$

Dersom $s = 0$ blir $(x, y) = (\xi, 0)$ så $u(x, 0) = h(x)$ blir $C = h(\xi)$. Vi setter inn, og eliminerer s:

$$x = a(h(\xi))y + \xi, \quad z = h(\xi).$$

For å eliminere ξ kan vi sette $\xi = x - a(h(\xi))y$ fra den første ligningen inn i den andre, og få $z = h(x - a(h(\xi))y) = h(x - a(z)y)$ som var det vi skulle finne (om vi døper om z til u igjen).

At løsningen blir singulær for noen positive y kan vises på flere måter. For eksempel kan vi derivere $u = h(x - a(u)y)$ med hensyn på x:

$$u_x = h'(\underbrace{x - a(u)y}_{\xi})(1 - a'(u)yu_x)$$

hvor jeg har definert ξ som antydet for å forenkle uttrykkene litt (og fordi det går godt sammen med bruken av ξ tidligere). Vi løser dette med hensyn på u_x, erstatter u med $h(\xi)$ og finner[2]

$$u_x = \frac{h'(\xi)}{1 + a'(h(\xi))h'(\xi)y} = \frac{h'(\xi)}{1 + (a \circ h)'(\xi)y}$$

Av løsningen ovenfor skulle det framgå at ξ er konstant langs karakteristikkene (ξ er x–koordinaten hvor karakteristikken krysser x–aksen). Dersom $(a \circ h)'(\xi) < 0$ for en ξ får vi dermed 0 i nevneren for $y = -1/(a \circ h)'(\xi)$, og u_x går mot uendelig når y nærmer seg denne verdien.

En annen måte å se det hele på er geometrisk: Dersom $\xi_1 < \xi_2$ og $a(h(\xi_1)) > a(h(\xi_2))$ ser du med en gang at de to karakteristikkene $x = a(h(\xi_1))y + \xi_1$ og $x = a(h(\xi_))y + \xi_2$ må krysse hverandre for en positiv y, men i krysningspunktet krever løsningen vår at både $u = h(\xi_1)$ og $u = h(\xi_2)$, som er absurd.

Vi kommer til å se dette igjen i forelesningene når jeg kommer til konserveringslover.

#**2**–**1:** Klassifiseringen av den gitte ligningen bestemmes av fortegnet til diskriminanten $\Delta = (x^2 - 1)(y^2 - 1) - (xy)^2 = 1 - x^2 - y^2$, slik:

$$\begin{array}{lll} x^2 + y^2 < 1 & \Delta > 0 & \text{elliptisk,} \\ x^2 + y^2 = 1 & \Delta = 0 & \text{parabolsk,} \\ x^2 + y^2 > 1 & \Delta < 0 & \text{hyperbolsk.} \end{array}$$

Den karakteristiske ligningen er $(x^2 - 1)\xi^2 + (y^2 - 1)\eta^2 + 2xy\xi\eta = 0$, som vi kan skrive

$$(x\xi + y\eta)^2 = 1$$

dersom vi velger $\xi^2 + \eta^2 = 1$ (husk at den karakteristisk ligningen er homogen i (ξ, η) slik at om (ξ, η) er en løsning er også $(k\xi, k\eta)$ det, så vi taper ingen generalitet ved dette valget). Nå husker vi videre at denne ligningen er en ligning for *normalvektoren* (ξ, η) til en karakteristisk kurve gjennom (x, y). Men da ser vi jo at linjene $x\xi + y\eta = \pm 1$, for fast (ξ, η) med $\xi^2 + \eta^2 = 1$, blir karakteristikker for problemet. Disse linjene er akkurat de som tangerer enhetssirkelen.

Oppgavesett #3 (til 1997–09–23) — til neste gang

Evans side 152: 3, 4. Dessuten:

#**3**–**1:** Løs eikonalligningen i to dimensjoner: $u_x^2 + u_y^2 = 1$ med initialbetingelsene $u(x, 0) = \sqrt{x^2 + R^2}$ og $u_y(x, 0) > 0$.

---

[2] $a \circ h$ er *sammensetningen* av funksjonene a og h, definert ved $a \circ h(\xi) = a(h(\xi))$.