75042 Partielle differensialligninger

Oppgavesett #4 (til 1997–09–30) — løsningsforslag

#4–1: Her opererer vi altså med fluksfunksjon $f(u) = (u^2 - \pi^2)^2/4$ og karakteristiske hastigheter $f'(u) = (u^2 - \pi^2)u$.

I tilfelle (i) er svaret gitt ved et enkelt sjokk med hastighet 0: $u(x,t) = -\pi$ for $x < 0$ og $u(x,t) = \pi$ for $x > 0$. (Entropibetingelsen er oppfylt fordi $u_l < u_r$ og grafen til f ligger over sekanten mellom $(u_l, f(u_l)) = (-\pi, 0)$ og $(u_r, f(u_r) = (\pi, 0)$.)

I tilfelle (ii) vil sjokket ikke oppfylle entropibetingelsen, og vi må bruke den berømte gummistrikkmetoden: Strekk en gummistrikk over grafen til f fra π til $-\pi$. Strikken vil berøre grafen mellom to punkter $-v$ og v (pga symmetri), som gir en fortynningsbølge. Mellom $-\pi$ og $-v$ og mellom v og π henger strikken i luften, som svarer til to sjokk. Sekanten må berøre grafen i punktet v, som gir ligningen

$$f'(v) = \frac{f(v) - f(\pi)}{v - \pi}, \text{ dvs } (v^2 - \pi^2) = \frac{1}{4}\frac{(v^2 - \pi^2)^2}{v - \pi}$$

som foruten de opplagte løsningene $v = \pm\pi$ har løsningen $v = \pi/3$, med tilhørende karakteristisk hastighet $f'(v) = -8\pi^3/27$. Tar vi symmetrien med i betraktning, ender vi altså med

$$u(x,t) = \begin{cases} \pi & x < -\frac{8}{27}\pi^3 t \\ (*) & -\frac{8}{27}\pi^3 t < x < \frac{8}{27}\pi^3 t \\ \pi & x > \frac{8}{27}\pi^3 t \end{cases}$$

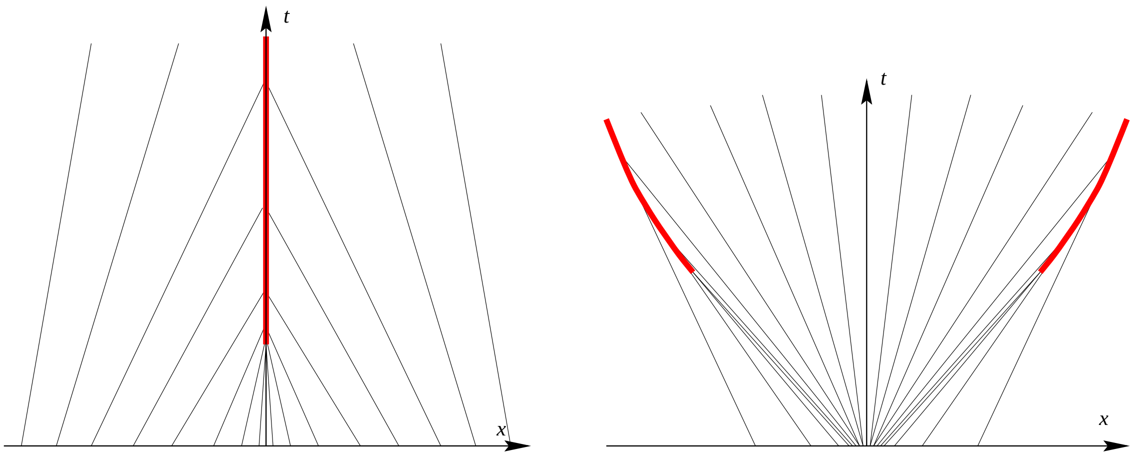
der $(*)$ betegner løsningen u av $f'(u) = x/t$, det vil si $u^3 - \pi^2 u = x/t$ (denne ligningen lar vi stå uløst).

I disse to tilfellene har initialdataene samme grenseverdier i $\pm\infty$ som i Riemannproblemene (i) og (ii), og dette gjør at det ikke er urimelig å vente at løsningene har visse fellestrekk. Om vi reskalerer løsningene av (iii) og (iv) med samme skala i x og t–retning, er ligningen (1) uendret, mens initialdataene nærmer seg initialdataene for (i) og (ii) dersom vi lar skalaene gå mot uendelig. Derfor burde løsningene av (iii) og (iv) utvikle sjokk omtrent lik de for (i) og (ii), og etter lang tid ha tilnærmet de samme verdiene mellom sjokkene.

Om vi betegner initialdataene med $u_0(\xi) = \pm 2 \operatorname{arctg} \xi$, blir hastigheten til karakteristikken som starter i $(\xi, 0)$ lik $f'(u_0(\xi)) = \pm c(\xi)$ der c er funksjonen oppgitt i oppgaven. Denne karakteristikken har da ligning $x = \xi \pm c(\xi)t$, og sjokk oppstår først for den ξ der $\pm c'(\xi)$ er minimal (negativ med størst absoluttverdi). For tilfelle (iii) er det for $\xi = 0$, mens for tilfelle (iv) bruker vi minustegnet, og da skjer det i punktene ± 2.26 omtrent (av figuren kan du bare se at tallet ligger rundt 2, og det er selvsagt akseptabelt).

Altså: I tilfelle (iii) oppstår sjokk for $\xi = 0$ ved tid $t = -1/c'(0) = 1/(2\pi^2)$ ($t \approx 1/19.7$ fra figuren). Alle karakteristikker fra begge sider vil treffe dette sjokket, som får hastighet 0 og altså ligningen $x = 0$ for $t > 1/(2\pi^2)$.

I tilfelle (iv) oppstår sjokk for $\xi \approx \pm 2$, ved tid $t \approx 1/2$ (siden $c'(\pm 2) \approx 2$ fra figuren). Dette blir ved posisjon rundt $x \approx 2 + 10 \cdot 2 = 22$ (for $c(2) \approx -10$) og $x \approx -22$ (ved symmetri). For store t venter vi at sjokkene går med hastigheter $\approx \pm 8\pi^3/27$ (som i tilfelle (ii)); karakteristikkene som har startet nær origo med hastigheter i intervallet $[-8\pi^3/27, 8\pi^3/27]$ treffer aldri noen av sjokkene, og ligner for store t på fortynningsdelen av løsningen i tilfelle (ii). Alle de andre karakteristikkene treffer ett av sjokkene før eller siden.



Sjokk og karakteristikker i tilfelle (iii) til venstre og tilfelle (iv) til høyre. x– og t–aksene er ikke likt skalert, og tegningene er langt fra eksakte — de er ikke beregnet, men håndtegnet i et tegneprogram. Merk at sjokkene *ikke* starter i $t = 0$.

Oppgavesett #5 (til 1997–10–07)

Alle oppgavene i notatet "Entropy conditions for conservation laws": Nummer 2, 3, 4, 7.