75042 Partielle differensialligninger

Oppgavesett #5 (til 1997–10–07) — løsningsforslag

Oppgavene var hentet fra notatet Entropy conditions for conservations laws (Ent).
Ved en feil var oppgavene merket #4 på arket som var delt ut.

Ent–2: I entropiulikheten $(u_r - u_l)\big(F(w) - \sigma w - C\big) > 0$ setter vi inn $C = F(u_l) - \sigma u_l$ og rydder litt:

$$(u_r - u_l)\big(F(w) - F(u_l) - \sigma(w - u_l)\big) > 0$$

men når w ligger mellom u_l og u_r så er $(u_r - u_l)(w - u_l) > 0$, så vi kan dividere med dette produktet og få den ekvivalente ulikheten

$$\frac{F(w) - F(u_l)}{w - u_l} - \sigma > 0$$

som er den første av de to ønskede ulikhetene. Den andre får vi ved å bruke $C = F(u_r) - \sigma u_r$ på samme måten.

Det beste beviset synes jeg likevel er rent geometrisk: Ulikheten i proposisjon 1 sier at grafen til F ligger på den ene siden av sekanten gjennom $\big(u_l, F(u_l)\big)$ og $\big(u_r, F(u_r)\big)$ (over hvis $u_r > u_l$, under hvis $u_l > u_r$). De to ulikhetene i oppgaven sammenligner stigningstallet til den sekanten med stigningstallene til to andre sekanter: Den mellom $\big(u_l, F(u_l)\big)$ og $\big(w, F(w)\big)$ og den mellom $\big(u_r, F(u_r)\big)$ og $\big(w, F(w)\big)$. Du trenger bare tegne en figur for å overbevise deg om at de to formuleringene er ekvivalente.

Ent–3: Som i oppgaven foran vil en enkel figur raskt avsløre sannheten.

Alternativt kan vi bemerke at sjokkhastigheten kan regnes ut som

$$\sigma = \frac{F(u_r) - F(u_l)}{u_r - u_l} = \frac{1}{u_r - u_l}\int_{u_l}^{u_r} F'(w)\,\mathrm{d}w$$

som er middelverdien av F' over intervallet mellom u_l og u_r. Siden F er konveks er F' monoton, og antar derfor sine ekstremverdier i endepunktene av intervallet. Middelverdien σ ligger mellom ekstremverdiene, altså mellom $F'(u_l)$ og $F'(u_r)$. De gitte ulikhetene i oppgaven er derfor ekvivalente med den enkle ulikheten $F'(u_l) \ge F'(u_r)$, som er ekvivalent med $u_l > u_r$ når F er konveks, og ekvivalent med $u_r > u_l$ når F er konkav. I det første tilfellet ligger grafen til F under sekanten, og i det andre tilfellet ligger den over. Dette stemmer med den geometriske tolkningen av entropiulikheten.

Ent–4: For Burgers ligning blir løsningen (formel (8) i notatet)

$$\int \frac{\mathrm{d}w}{\frac{1}{2}w^2 - \sigma w - C} = \xi.$$

Ting blir enklere om vi skriver $\frac{1}{2}w^2 - \sigma w - C = \frac{1}{2}\big((w-\sigma)^2 - \delta^2\big)$ der $\delta = (u_r - u_l)/2$. (Vi husker at $\sigma = (u_r + u_l)/2$, og C er slik at $\frac{1}{2}w^2 - \sigma w - C = 0$ når $w \in \{u_l, u_r\}$. Dette passer med formelen over.) Vi får dermed[1]

$$\xi = 2\int \frac{\mathrm{d}w}{(w-\sigma)^2 - \delta^2} = -\frac{2}{\delta}\int \mathrm{d}\zeta = -\frac{2}{\delta}\operatorname{arctanh}\frac{w-\sigma}{\delta}$$

hvor vi har brukt substitusjonen $w - \sigma = \delta \tanh \zeta$, som gir

$$\mathrm{d}w = \delta(1 - \tanh^2\zeta)\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{\delta}\big(\delta^2 - (w-\sigma)^2\big)\mathrm{d}\zeta.$$

Vi ender med

$$w = \sigma - \delta \tanh\frac{\delta\cdot\xi}{2}.$$

[1] Du vet kanskje at hyperbolsk arcus tangens kan uttrykkes ved hjelp av naturlige logaritmer og kvadratrøtter, men her er vi mer interessert i å omvende formelen og uttrykke w ved ξ, og da kommer det bare i veien.

Ent–7: For Burgers ligning med $F(u) = u^2/2$, og $H(u) = u^2/2$ som foreslått, skal vi ha $G'(u) = F'(u)H'(u) = u^2$ som leder til $G(u) = u^3/3$. Ulikheten i lemma 6 blir da

$$\frac{u_r^3 - u_l^3}{3} \le \frac{u_r + u_l}{2}\frac{u_r^2 - u_l^2}{2}.$$

Etter å ha ganget med fellesnevneren 12, ganget ut parenteser og samlet leddene, står vi igjen med

$$u_r^2 - 3u_r^2 u_l + 3u_r u_l^2 - u_l^3 \le 0,$$

med andre ord $(u_r - u_l)^3 \le 0$. Det er ekvivalent med $u_r - u_l \le 0$, og det er akkurat entropibetingelsen for når F er strengt konveks slik den er for Burgers lov.

Oppgavesett #6 (til 1997–10–14)

Fra Evans side 80: oppgave 2, 3, 4. Dessuten:

#**6–1:** La u være en C^2–funksjon på en åpen mengde. Vis at u ikke kan ha et lokalt maksimum i et punkt hvor $\Delta u > 0$.

#**6–2:** La Ω være en begrenset åpen mengde, og la $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ oppfylle ligningen $\Delta u = u^3 - u$ i Ω, mens $u = 0$ på $\partial\Omega$. Vis at $-1 \le u \le 1$ i hele Ω.