75042 Partielle differensialligninger

Oppgavesett #6 (til 1997–10–14) — løsningsforslag

De første oppgavene var hentet fra Evans side 80.

Evans 2.5–2: Om vi meget kort skriver u_i for $\partial u/\partial x_i$ osv., og q_{ij} for elementene i den ortogonale matrisen Q, kan vi skrive resultatet av kjerneregelen $\mathrm{D}v(x) = \mathrm{D}u(Qx) \cdot Q$ noe kortere som $v_k = \sum_i u_i q_{ik}$. En ytterligere derivasjon gir $v_{kk} = \sum_{i,j} u_{ij} q_{ik} q_{jk}$ og dermed

$$\Delta v = \sum_k v_{kk} = \sum_{i,j} u_{ij} \sum_k q_{ik} q_{jk} = \sum_i u_{ii} = \Delta u = 0,$$

fordi Q ortogonal gir $QQ^{\mathrm{T}} = I$, altså

$$\sum_k q_{ik} q_{jk} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Evans 2.5–3: As in the proof on pp. 29–30, define

$$\varphi(\rho) = ⨍_{\partial B(0,\rho)} u(y)\,\mathrm{d}S(y)$$

and find

$$\varphi'(\rho) = \frac{\rho}{n} ⨍_{B(0,\rho)} \Delta u(y)\,\mathrm{d}y = -\frac{\rho}{n} ⨍_{B(0,\rho)} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Now that we know φ' we can integrate to find φ. On one hand (by continuity of u) $\varphi(0) = u(0)$, and on the other hand we can find $\varphi(r)$ from the given data. So it's just a question of integrating the derivative:

$$\begin{aligned} u(0) = \varphi(0) &= \varphi(r) - \int_0^r \varphi'(\rho)\,\mathrm{d}\rho \\ &= ⨍_{\partial B(0,r)} g(y)\,\mathrm{d}S(y) + \int_0^r \frac{\rho}{n} \frac{1}{\alpha(n)\rho^n} \int_{B(0,\rho)} f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\rho \end{aligned}$$

Here we must interchange the order of integration: Note that we integrate over those $(y, \rho) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ satisfying $|y| < \rho < r$.

$$\begin{aligned} u(0) &= ⨍_{\partial B(0,r)} g(y)\,\mathrm{d}S(y) + \int_{B(0,r)} f(y) \int_{|y|}^r \frac{1}{n\alpha(n)\rho^{n-1}}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}y \\ &= ⨍_{\partial B(0,r)} g(y)\,\mathrm{d}S(y) - \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{B(0,r)} f(y) \left(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{|y|^{n-2}} \right) \mathrm{d}y \end{aligned}$$

as desired.

Evans 2.5–4: Replace u in the previous problem by our subharmonic v, and define φ the same way (but let the center of the ball be x instead of 0). The formula for φ' immediately shows that $\varphi' \geq 0$, so φ is non-decreasing. In particular

$$v(x) = \varphi(0) \leq \varphi(r) = ⨍_{\partial B(x,r)} v\,\mathrm{d}S(y)$$

for subharmonic v. To get the desired inequality is essentially a question of integrating in polar coordinates:

$$\begin{aligned} ⨍_{B(x,r)} v(y)\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(0,r)} v(x+y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_0^r \int_{\partial B(0,\rho)} v(x+y)\,\mathrm{d}S(y)\,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_0^r n\alpha(n)\rho^{n-1} \underbrace{⨍_{\partial B(0,\rho)} v(x+y)\,\mathrm{d}S(y)}_{\geq v(x)}\,\mathrm{d}\rho \\ &\geq \frac{v(x)}{r^n} \int_0^r n\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho = v(x) \end{aligned}$$

If v has a maximum point in $x \in U$, the above inequality will imply that $v(y) = v(x)$ for all y in a neighbourhood of x: For when $v(y) \le v(x)$ for $y \in B(x,r)$ then instead of the above inequality we find the opposite inequality — and it becomes strict if $v(y) < v(x)$ for some y. Then the same connectedness argument as in the proof of the strong maximum principle shows that u is constant in the component of U containing x, and so u achieves its maximum on the boundary of that component.

To show $\varphi(u)$ is subharmonic when φ is convex and u is harmonic, is simple: Just compute $\varphi(u)_{x_i x_i} = \varphi''(u)u_{x_i}^2 + \varphi'(u)u_{x_i x_i}$ and add them all together to get $\Delta\varphi(u) = \varphi''(u)|Du|^2 + \varphi'(u)\Delta u \ge 0$ since the first term is nonnegative and the second is zero.

Finally, if u is harmonic then so is u_{x_i}, and therefore $u_{x_i}^2$ is subharmonic by the previous result. Add them all together to get $|Du|^2$ subharmonic.

#6–1: I et lokalt maksimum vil $u_{x_i x_i} \le 0$ for alle i, og summerer vi over i får vi $\Delta u \le 0$.

#6–2: Anta at $u > 1$ i minst ett punkt i Ω. Siden u er kontinuerlig i den kompakte mengden $\overline{\Omega}$, vil u oppnå et maksimum i denne mengden. Dette kan ikke skje på randen, siden $u = 0$ der. Altså oppnår u et maksimum i et punkt $x_0 \in \Omega$. Siden nå $u(x_0) > 1$ blir $\Delta u(x_0) = u(x_0)^3 - u(x_0) > 0$, som umulig kan skje i et maksimumspunkt i følge forrige oppgave.

Oppgavesett #7 (til 1997–10–21)

#7–1: Finn en ikketriviell løsning til det homogene Dirichletproblemet $\Delta u = 0$ i Ω, $u = 0$ på $\partial\Omega$ der Ω er stripen $0 < y < \pi$ i planet. Hva forteller dette eksemplet om maksimumsprinsippet? (*Hint. Bruk separasjon av variable.*)

#7–2: La $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ være en åpen mengde, og (u_n) en følge av harmoniske funksjoner på Ω. Vi sier at u_n konvergerer mot en grense u *uniformt på kompakter* om det, for hver kompakt mengde $K \subset \Omega$ og hver $\varepsilon > 0$, finnes N slik at om $n \ge N$ og $x \in K$ er $|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$. Vis at grensen u er harmonisk om dette er tilfelle. (*Hint. Bruk middelverdiegenskapen.*)

#7–3: La $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ være en åpen, begrenset og sammenhengende mengde, og la (u_n) være en svakt voksende ($u_{n+1} \ge u_n$) følge av harmoniske funksjoner på Ω. Anta at det finnes et punkt $x \in \Omega$ slik at $\sup_n u_n(x) < \infty$. Vis at da vil u_n konvergere uniformt på kompakter mot en harmonisk funksjon u.

#7–4: La v være subharmonisk og u harmonisk i et åpent, begrenset område Ω, og anta de begge er kontinuerlige i $\overline{\Omega}$. Vis at om $v \le u$ på $\partial\Omega$ så er $v \le u$ i Ω.

#7–5: Vis Hadamards teorem om tre sirkler (three circles theorem): La $v(x,y)$ være subharmonisk i et område som inneholder annulusen $r_1^2 \le x^2 + y^2 \le r_2^2$. Da vil maksimumsfunksjonen

$$M(r) = \max_{x^2+y^2=r^2} v(x,y)$$

oppfylle

$$M(r) \le \frac{M(r_1)\ln\dfrac{r_2}{r} + M(r_2)\ln\dfrac{r}{r_1}}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}} \qquad (r_1 < r < r_2).$$

(*Hint. Enhver funksjon på formen $a\ln r + b$ er harmonisk i $\mathbb{R}^2$.*)

Hva blir det tilsvarende teoremet om tre kuler i $\mathbb{R}^n$ når $n \ge 3$?