75042 Partielle differensialligninger

Oppgavesett #7 (til 1997–10–21) — løsningsforslag

#7–1: The standard separation of variables procedure tells us to look for solutions to $\Delta u = 0$ on the form $u(x,y) = X(x)Y(y)$ with $Y(0) = Y(\pi) = 0$. The PDE becomes $X''/X + Y''/Y = 0$ (after dividing by XY), so each term must be constant, and we get $Y(y) = \sin ky$ ($k = 1, 2, \dots$) because of the conditions on Y. Then $X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$, and we get unbounded solutions. The example tells us that the maximum principle may fail for unbounded domains.

#7–2: La u_n være harmonisk og $u_n \to u$ uniformt på kompakte mengder i Ω. For å vise at u er harmonisk er det nok å vise middelverdiegenskapen. Så la $x \in \Omega$, og velg $r > 0$ liten nok til at $B(x,r) \subset \Omega$. Siden $\partial B(x,r)$ er en kompakt delmengde av Ω, vil $u_n \to u$ uniformt på $\partial B(x,r)$ og dermed vil $⨍_{\partial B(x,r)} u_n \, \mathrm{d}S \to ⨍_{\partial B(x,r)} u \, \mathrm{d}S$. Dermed blir

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} ⨍_{\partial B(x,r)} u_n \, \mathrm{d}S = ⨍_{\partial B(x,r)} u \, \mathrm{d}S,$$

som var det vi skulle vise.

Konvergensen av integralet følger av estimatet

$$\left| ⨍_{\partial B(x,r)} u_n \, \mathrm{d}S - ⨍_{\partial B(x,r)} u \, \mathrm{d}S \right| \le ⨍_{\partial B(x,r)} |u_n(y) - u(y)| \, \mathrm{d}S < \varepsilon$$

dersom n er så stor at $|u_n(y) - u(y)| < \varepsilon$ når $y \in \partial B(x,r)$.

#7–3: Vi må bare vise uniform konvergens på kompakter. At grensen er harmonisk følger da av forrige oppgave. Uniform konvergens vil følge av Harnacks ulikhet:

Hvis K er en kompakt delmengde av Ω, finnes alltid en sammenhengende kompakt K' med $K \subseteq K' \subset \Omega$. Dette følger av at Ω er sammenhengende, og virker kanskje intuitivt opplagt. Den greieste måten å bevise det på er å merke seg at K kan dekkes av et endelig antall åpne baller $U(x_i, r)$ der $x \in K$ og $r < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega$. Da er også unionen av tillukningen $B(x_i, r)$ til disse ballene inneholdt i Ω, og vi kan danne K' ved å ta unionen av disse ballene og legge til en vei i Ω mellom alle sentrene x_i. (Grunnen til at vi måtte ta denne omveien er at en kompakt mengde gjerne kan ha uendelig mange komponenter.)

Vi kan altså reformulere Harnacks ulikhet slik: For hver kompakt mengde $K \subset \Omega$ finnes en konstant M slik at for enhver harmonisk $v \ge 0$ på Ω gjelder $\max_K v \le Mu(x)$. (Bevis: anvend Harnacks ulikhet på en sammenhengende kompakt delmengde av Ω som inneholder $K \cup \{x\}$.)

Siden $u_n(x)$ er en voksende og begrenset følge er den konvergent, og spesielt er den Cauchy. jeg vil bruke Harnacks ulikhet til å vise at følgen (u_n) er uniformt Cauchy på kompakter. Så la $K \subset \Omega$ være kompakt, og la M være som i avsnittet foran. La $\varepsilon > 0$ og la N være slik at $|u_m(x) - u_n(x)| < \varepsilon/M$ når $m, n \ge N$.[1] Hvis nå $N \le m < n$ så er jo $u_n - u_m \ge 0$ harmonisk på Ω, og derfor er

$$\max_K |u_n - u_m| = \max_K (u_n - u_m) \le M\big(u_n(x) - u_m(x)\big) < M \cdot \varepsilon/M = \varepsilon,$$

slik at (u_n) er uniformt Cauchy og derfor uniformt konvergent på K.

For å rettferdiggjøre den siste påstanden er det bare å merke seg at om $y \in K$ så er $|u_m(y) - u_n(y)| \le \max_K |u_n - u_m|$ som viser at $(u_n(y))$ er Cauchy, og derfor konvergent. Så $u(y) = \lim_{n\to\infty} u_n(y)$ eksisterer for alle $y \in K$. I ulikheten $|u_m(y) - u_n(y)| < \varepsilon$ for alle $y \in K$ og $m, n \ge N$ kan vi altså la $n \to \infty$ og få $|u_m(y) - u(y)| \le \varepsilon$ for alle $y \in K$ og $m \ge N$, som er uniform konvergens mot u på K.

#7–4: Hvis v er subharmonisk og u harmonisk, er $v - u$ subharmonisk. Ved oppgave 4*b* (side 81), som vi løste i forrige oppgavesett, er $v - u \le 0$ i Ω.

#7–5: Høyresiden i ulikheten vi skal bevise er på formen $a \ln r + b$, og er derfor en harmonisk funksjon av (x,y) når $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dessuten tar den verdien $M(r_i)$ når $r = r_i$ ($i \in \{1,2\}$). Det

[1] Vanligvis ville jeg bare krevet $< \varepsilon$ og bemerket at sluttestimatet som ender med $M\varepsilon$ er godt nok, men vaner er til for å brytes i blant.

følger at

$$u(x,y) \le \frac{M(r_1)\ln\dfrac{r_2}{r} + M(r_2)\ln\dfrac{r}{r_1}}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}} \qquad (r = \sqrt{x^2+y^2}).$$

når (x,y) ligger på randen av annulusen, og siden begge sider er harmoniske gjelder ulikheten også i det indre, ved maksimumsprinsippet. Dette medfører den ønskede ulikheten.

Beviset lar seg umiddelbart generalisere til å vise ulikheten

$$M(r) \le M(r_1)\frac{\Phi(r_2)-\Phi(r)}{\Phi(r_2)-\Phi(r_1)} + M(r_2)\frac{\Phi(r)-\Phi(r_1)}{\Phi(r_2)-\Phi(r_1)}$$

for alle n, hvor Φ er fundamentalløsningen til Laplaceoperatoren.

Oppgavesett #8 (til 1997–10–28)

Fra Evans side 81: Oppgave 9. (*Hint*: Bruk Poisson's integralformel.) Også oppgave 11 (side 82), pluss følgende:

#8–1: Hva er Laplaceoperatoren i to variable uttrykt i polarkoordinater? Bruk separasjon av variable til å uttrykke løsningen av randverdiproblemet $\Delta u = 0$ i $x^2+y^2<1$, $u(e^{i\theta}) = g(\theta)$ ved Fourierrekken til g. (Her har jeg identifisert planet $\mathbb{R}^2$ med $\mathbb{C}$ ved å identifisere (x,y) med $x+iy$; dette er ofte nyttig når man studerer harmoniske funksjoner i to variable.) Når du setter inn integralet for Fourierkoeffisientene til g i den resulterende rekken og bytter om sum og integral, blir summen en geometrisk rekke som du kan summere eksplisitt. Resultatet skal være Poisson's integralformel for $n=2$. Sammenlign med den generelle formelen i Evans. (*Hint*: Skriv Fourierrekkene som $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$, ikke uttrykt ved $\sin n\theta$ og $\cos n\theta$. R-ligningen du får ved separasjon av variable ser vanskelig ut, men prøv med svar på formen r^γ for en konstant γ.)